

QCM de résvision : le 24 juin 2010

Pour chacune des affirmations ci-dessous, déterminez si elle est vraie ou fausse. Vous devez pouvoir justifier votre choix.

Question 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Si f est dérivable sur $I = [a, b]$ alors f est bornée sur I .
2. Si f est continue sur $I =]a, b[$ alors f est bornée sur I .
3. Si $f(I) \subset I$ et g est bornée sur I alors $g \circ f$ est bornée sur I .
4. Si $f(I) \subset I$ et $g \circ f$ est bornée sur I alors g est bornée sur I .

Question 2. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $I =]a, b[$ et $c \in I$.

1. Si f est dérivable en c alors f est continue en c .
2. Si f est dérivable à droite et à gauche en c alors f est dérivable en c .
3. Si $f'(c) = 0$ alors c est un maximum ou un minimum au voisinage de c .
4. Si f s'annule en c alors f' s'annule également en c .

Question 3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 3y + z, x - 2y, -y - z)$.

1. La matrice de f dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $\text{rang } f = 3$.
3. $\dim \ker f = 1$.
4. f est un projecteur.

Question 4. Avec les notations de la question précédente.

1. $\ker f$ est décrit par les équations $x - 2y = 0$ et $y + z = 0$.
2. Les vecteurs $(2, 1, 0)$ et $(0, -1, 1)$ forment une base de $\ker f$.
3. $\text{im } f$ est engendré par les vecteurs $(2, -3, 1)$, $(1, -2, 0)$ et $(0, -1, -1)$.
4. Les vecteurs $(2, 1, 0)$, $(-3, -2, -1)$ et $(1, 0, -1)$ forment une base de $\text{im } f$.

Question 5. Avec les notations de la question précédente. Soit $u_1 = (2, 1, 4)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (3, 0, 0)$. Notons M la matrice de la famille $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ dans la base canonique.

1. La famille \mathcal{U} est une base de \mathbb{R}^3 .
2. $\det M = -12$.
3. La matrice de f dans la base \mathcal{U} est la matrice nulle.
4. La matrice de f dans la base \mathcal{U} est diagonale.

Question 6. Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et l'équation différentielle $(E) : y' - a(x)y = 0$.

1. (E) admet seulement la fonction nulle pour solution si on impose $y(0) = 0$.
2. L'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 1.
3. Si $a(x) = x$ alors l'équation (E) admet pour seule solution $y(x) = \frac{x^2}{2}$.
4. Si $a(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alors pour toute solution y de (E) la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ est finie.

Question 7. Soit g définie sur \mathbb{R}^* par $g(t) = \frac{t^3}{e^{t^2} - 1}$ et $g(0) = 0$.

1. La fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .
2. La fonction g est continue sur \mathbb{R} .
3. La fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
4. La fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Question 8. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \sin\left(2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right)$ si $y \neq 0$ et $f(x, 0) = 0$.

1. Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$.
2. La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur D .
3. La fonction f est continue en $(0, 0)$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$.

Question 9. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire φ défini sur $E \times E$ par $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$.

1. Les polynômes 1, X et X^2 forment une base orthonormée de E .
2. Soit l'application f définie sur E par $f(P(X)) = P(1 - X)$. Alors $f \in \mathcal{L}(E)$.
3. L'application f est un automorphisme orthogonal de E .
4. L'application f est une rotation de l'espace E .

Question 10. Soit la courbe \mathcal{C} du plan paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \sin(t^2) \\ y(t) = \cos(t) - 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

1. La courbe \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'origine.
2. Pour tracer \mathcal{C} il suffit de représenter $(x(t), y(t))$ avec $t \geq 0$.
3. La courbe admet un point singulier en $t = 0$ qui est un rebroussement de première espèce.
4. La courbe admet une branche infinie.

Question 11. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère la fonction Tf définie par

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ si } x \neq 0 \text{ et } Tf(0) = f(0).$$

1. La fonction Tf est continue sur \mathbb{R} .
2. La fonction Tf est une primitive de f sur \mathbb{R} .
3. La fonction Tf est dérivable sur \mathbb{R} .
4. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.

Question 12. Quelques commandes Maple.

1. `evalf(e)` ; renvoie une valeur approchée de la valeur e .
2. `>plot(x**2,-1,1)` ; trace la courbe d'équation $y = x^2$ pour $x \in [-1, 1]$.
3. `f(t)=exp(-t)*cos(t)` définit la fonction $t \mapsto e^{-t} \cos(t)$.
4. `liste :=proc(n) local L,k ; L :=NULL ; for k from 1 to n do if type(k,odd) then L :=L,k end if ; end do ; [L] ; end` ; est une procédure dont la variable est n qui retourne la liste des entiers impairs compris entre 1 et n .