

Feuille d'exercices 1 : **Notions sur les ensembles et applications***Ensembles et sous-ensembles*

Dans les six exercices suivants  $A$ ,  $B$  et  $C$  désignent des parties d'un ensemble  $E$  et  $X^c$  le complémentaire de  $X$  dans  $E$ .

**Exercice 1.** On considère les ensembles suivants :  $E = \mathbb{R}$ ;  $A = \{-1; 1\}$ ;  $B = \{x \in \mathbb{R}, |x| > 1\}$  et  $C = ]-1; 1[$ .

Expliciter des relations entre  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Exercice 2.** Dans chacun des cas ci-dessous, décrire les sous-ensembles  $A^c$ ,  $B^c$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .

1.  $E = \mathbb{R}$ ,  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 < 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .
2.  $E$  et  $A$  comme ci-dessus.  $B = \mathbb{Z}$ .
3.  $E = \mathbb{C}$ ,  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ,  $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 1\}$ .

**Exercice 3.** Parmi les assertions ci-dessous déterminer puis démontrer celles qui sont vraies (sinon, donner un contre-exemple).

1. Si  $A \subset C$  et  $B \subset C$  alors  $A \cup B \subset C$ ,
2.  $A \cap (B \cup C) = A \cap B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$ ,
3.  $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$ ,
4. Si  $A \subset (B \cup C)^c$  alors  $B^c \cup C^c \subset A$ .

**Exercice 4.** Montrer l'affirmation suivante :  $A \cap B \subset A \cap C$  et  $A \cup B \subset A \cup C \Rightarrow B \subset C$ .

**Exercice 5.** Simplifier les expressions suivantes :

1.  $A \cap (A^c \cup B)$ ,
2.  $A \cup (A \cup B^c)^c$ ,
3.  $A \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$ .

**Exercice 6.** Montrer l'égalité suivante :  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ .

*Applications*

**Exercice 7.** Parmi les applications définies ci-dessous, déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives. Déterminer lorsque cela est possible l'application réciproque.

$$a : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2n \end{array}$$

$$b : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty[ \\ x \mapsto |x| \end{array}$$

$$c : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x + 1 \end{array}$$

$$d : \begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{2\} \\ z \mapsto \frac{2z+1}{z+1} \end{array}$$

$$e : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 \end{array}$$

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \end{array}$$

**Exercice 8.** On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :  $f(x, y) = (x + y, xy)$ . La fonction  $f$  est-elle injective ? surjective ? Déterminer le nombre d'antécédents par  $f$  d'un élément  $(u, v)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 9.** Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .  
Montrer que si  $f$  est strictement monotone alors  $f$  est injective. La réciproque est-elle vraie ?

En fait nous avons le théorème suivant :

**Théorème 0.1.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .
  - (ii)  $f$  est bijective de  $I$  sur  $f(I)$ .
- De plus la réciproque  $f^{-1}$  est continue.

**Exercice 10.** On considère la fonction  $f$  d'une variable réelle définie par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

1. Etudier  $f$ .
2. Donner un ensemble sur lequel  $f$  définit une bijection. Donner alors une expression pour sa réciproque.

**Exercice 11.** Soit  $f$  et  $g$  les applications de  $[0, 1]$  dans lui-même définies par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{2}{3}] \\ 3x - 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Les applications  $f$  et  $g$  sont-elles surjectives ? Injectives ?
2. Décrire  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

**Exercice 12.** Soit  $E, F, G$  des ensembles et  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  des applications.

1. Montrer les affirmations suivantes :
  - si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  est injective.
  - si  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  est surjective.
2. Soit  $s$  une application de  $E$  dans  $E$ . On dit que  $s$  est une *involution* si  $s \circ s = Id_E$ .  
Montrer qu'une involution est bijective. Donner des exemples d'involution.

**Exercice 13.**  $f$  désigne la fonction cosinus définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . Déterminer les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}) ; f^{-1}(\mathbb{R}) ; f([0, \frac{\pi}{2}[) ; f^{-1}(\{1\}) ; f^{-1}(f([0, \pi]))$$

Même question pour la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ .

**Exercice 14.** Montrer que si  $f$  est injective alors  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .