Feuille d'exercices 21. **Espaces euclidiens**

Sauf mention contraire E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$ et dont la norme associée est notée $||.||$.

Produit scalaire et relation d'orthogonalité.

Exercice 1. Soit u et v deux vecteurs de E. Montrer les égalités suivantes :

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$$

$$(u|v) = \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right)$$

Donner une interprétation géométrique pour ces deux égalités.

Exercice 2. Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.
Soit $(u, v) \in E^2$. Montrer que $||u + v|| = ||u|| + ||v||$ si et seulement si u et v sont colinéaires et de même sens.

Exercice 3. Parmi les applications φ ci-dessous déterminer lesquelles définissent un produit scalaire sur les espaces E considérés.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $\varphi((x, y), (x', y')) = x + x' + y + y'$.
2. $E = \mathbb{R}^2$ et $\varphi((x, y), (x', y')) = xx' - yy'$.
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = (xx', yy', zz')$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0)$.
5. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.
6. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ une famille de réels distincts et $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.
7. $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)e^{-t}\, dt$.
8. E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ qui s'annulent en 0 et $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt$.
9. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et pour $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ on définit
$$\varphi(M_1, M_2) = a_1a_2 + c_1c_2 + b_1b_2 + d_1d_2.$$

Exercice 4. Soit $(u, v) \in E^2$. Montrer que u et v sont orthogonaux si et seulement si

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

Cette affirmation est-elle vraie si on considère plus de deux vecteurs ?

Exercice 5. Démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n\left(\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2\right)$ avec égalité si et seulement si tout les x_i sont égaux.
2. Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle $[a, b]$:
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\, dt\right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2\, dt \int_a^b g(t)^2\, dt.$$

Familles orthogonales. Base orthonormée.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que

$$\forall x \in E,\ ||x||^2 = \sum_{k=1}^{p} (x|e_k)^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille orthonormale de E. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{F}$?
2. Montrer que pour tout $y \in E$ on a l'égalité $y = \sum_{k=1}^{p} (y|e_k)e_k$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{F}$?
3. Donner $\dim E$.

Exercice 7. $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0\}$.
1. Soit $u = (-1, 1, 0, 0)$, $v = (-1, 0, 1, 0)$ et $w = (-1, 0, 0, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de E. Est-elle orthonormée ?
2. A l'aide du procédé de Gram-Schmidt déterminer une base orthonormale de E.

Exercice 8. On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

1. Montrer que l'application définit un produit scalaire sur E. L'espace E est-il euclidien ?
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Solution : le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué $(1, X, X^2)$ *donne pour famille orthogonale* $(1, X, X^2 - \frac{1}{3})$.

Exercice 9. Soit E un espace euclidien.
1. Montrer que l'application $\Phi : a \mapsto (x \mapsto (a|x))$ est un isomorphisme de E vers $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
2. En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = (a|x).$$

Espaces orthogonaux et projecteurs.

Exercice 10. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit le sous-espace $F \subset \mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x + 2z = 0$.
1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $v = (1, 1, 1)$ sur F.
3. Quelle est la distance entre v et F ?

Exercice 11. Soit E un espace euclidien puis F et G deux sous-espaces.
1. Montrer que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
2. Que dire de $(F \cap G)^{\perp}$?

Exercice 12. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que f est un projecteur. Montrer que ce projecteur est orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ ||f(x)|| \leq ||x||$$