

Feuille d'exercices 4 : **Les nombres complexes.***Généralités, révisions.*

Exercice 1. Donner les parties réelles et imaginaires des nombres suivants :

$$(3 - i)^3 \quad ; \quad \frac{1 + 2i}{2 - i} \quad ; \quad \frac{1}{1 + i} + \frac{1}{1 - i} \quad ; \quad \frac{1}{1 + e^{i\theta}}, \theta \in \mathbb{R} \quad ; \quad z + \frac{1}{z}, z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des couples $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tels que $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$ puis tels que $\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$.

Exercice 3. Equations de degré deux à coefficients réels. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0.$$

1. Montrer que cette équation admet des racines réelles ou complexes conjuguées.
2. Applications : résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad 5z^2 - 2z + 1 = 0.$$

Exercice 4. Racines carrées dans \mathbb{C} . Déterminer les racines carrées dans \mathbb{C} de $2i$, $8 - 6i$ et $-3 + 4i$.

Exercice 5. Soit a et b deux nombres complexes distincts.

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tel que $\frac{|z - a|}{|z - b|} = 1$.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{|z - 3|}{|z - 5|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 6. L'identité du parallélogramme. Montrer que pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, on a l'égalité :

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

En identifiant le plan euclidien muni d'un repère orthonormé et \mathbb{C} , donner une interprétation géométrique pour cette égalité.

Exercice 7. L'inégalité triangulaire.

1. Déterminer les couples $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z + z'| = |z| + |z'|$.
2. Généralisation : montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $\forall (z_k)_{1 \leq k \leq n}$, $|\sum_{k=1}^n z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$, puis étudier le cas d'égalité.

Exercice 8. Soient z, z' deux nombres complexes. Établir l'inégalité suivante puis étudier le cas d'égalité :

$$\operatorname{Re}(z \bar{z}') \leq \frac{1}{2} (|z|^2 + |z'|^2).$$

Exercice 9. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan complexe. F est l'application du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point $F(M)$ d'affixe $f(z) = \frac{z}{2} + \frac{i\bar{z}}{2}$.

1. Déterminer l'ensemble \mathcal{D} des points fixes de F .
2. Montrer que M' appartient à la droite Δ_M passant par M et de vecteur directeur $\vec{i} - \vec{j}$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $f(f(z)) = f(z)$. En déduire une caractérisation géométrique de F .

Exercice 10. On considère l'application complexe $f := z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f envoie le demi-plan complexe supérieur $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ sur le disque unité $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
2. Montrer que $f : E \rightarrow F$ admet une application réciproque que l'on déterminera.

Révisions : un peu de trigonométrie sans complexe.

Exercice 11. Soit $a \in [-1, 1]$ un réel fixé. Résoudre les équations suivantes :

1. $\arccos(x) + \arccos(a) = \pi$.
2. $\arccos(a) + \arcsin(x) = \pi$.
3. $\arccos(x) = 2 \arccos(a)$. (Attention à l'intervalle de définition de a).

Exercice 12. Résoudre l'équation suivante :

$$\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

- a) $\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) = 1$ b) $\cos(x) + \sin(x) = 1$
- c) $\alpha \cos(2x) = 4 \sin(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ d) $\tan(2x - 1) = \tan(x)$

Exercice 14. Calculer les sommes suivantes : a) $\sum_{k=0}^n \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right)$. b) $\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{4k+1}{4} \pi\right)$.

Forme trigonométrique, racines n -ièmes.

Exercice 15. Écrire sous forme trigonométrique et algébrique le complexe

1. de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{4}$.
2. de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{8}$.
3. produit des deux précédents.

Exercice 16. Mettre sous forme trigonométrique les complexes $u = \sqrt{3} - i$ et $v = -1 + i$. En déduire uv et $\frac{u}{v}$.

Exercice 17. Pour quelles valeurs de l'entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ les complexes suivants sont-ils réels ? :

$$a_n = i^n \quad \text{et} \quad b_n = (1 + i)^n.$$

Lorsque n est positif, développer b_n à l'aide de la formule du binôme de Newton. Quelles relations en déduit-on pour les coefficients binomiaux ?

Exercice 18. Déterminer le module et l'argument des solutions complexes de l'équation :

$$z^2 - 2r \cos(\varphi)z + r^2 = 0, \quad \text{avec } r > 0 \text{ et } \varphi \in \mathbb{R}$$

A quelle condition les solutions sont-elles réelles ?

Pourquoi tout polynôme unitaire de degré 2 à coefficients réels et discriminant négatif peut-il s'écrire sous la forme $z^2 - 2r \cos(\varphi)z + r^2$?

En déduire l'ensemble des solutions des équations $(E_r) := z^2 - r\sqrt{3}z + r^2 = 0$, $r \geq 0$.

Exercice 19. Donner le module et l'argument des nombres complexes suivants $((\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2)$:

$$1 + e^{i\theta}; \quad 1 - e^{i\theta}; \quad e^{i\theta} + e^{i\theta'}; \quad e^{i\theta} - e^{i\theta'}; \quad \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}.$$

Remarques : faites un dessin ! Quelles formules de trigonométrie retrouve-t-on ici ?

Exercice 20. Résoudre dans \mathbb{R} le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \cos(x) + \cos(2x) = -1 \\ \sin(x) + \sin(2x) = 0 \end{cases}$$

Exercice 21. Étant donné $a \in \mathbb{R}$, résoudre dans \mathbb{R} le système d'inconnues x, y :

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 + \cos a \\ \sin x + \sin y = \sin a \end{cases}$$

Exercice 22. On considère le nombre complexe $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

- Déterminer algébriquement les racines carrées de z .
- A partir d'une forme trigonométrique pour z , déterminer une forme trigonométrique pour les racines carrées de z .
- En déduire les nombres $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 23. On pose $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

- A partir de ζ , expliciter les racines 5-ièmes de l'unité.
- Montrer que la somme de ces racines est nulle. On pose $u = \zeta + \zeta^4$ et $v = \zeta^2 + \zeta^3$.
- Calculer $u + v$ et uv .
- En déduire u, v et le nombre $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice 24. Déterminer :

- les racines carrées, cubiques et quatrièmes de $2i$ et $1+i$ que l'on représentera graphiquement.
- les racines cinquièmes de $-i$.
- les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i} \sqrt{3}$.

Exercice 25. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel n , calculer les deux sommes suivantes :

$$A(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad B(\theta) = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

Exercice 26. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier :

$$1 + \binom{n}{1} \cos(\theta) + \binom{n}{2} \cos(2\theta) + \cdots + \binom{n}{n} \cos(n\theta).$$

Exercice 27. Résoudre l'équation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(k\theta)}{(\cos \theta)^k} = 0 \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 28. On note $\zeta_1 = e^{2i\frac{\pi}{n}}$ et $\zeta_k = \zeta_1^k$ pour $0 \leq k \leq n-1$ les racines n -ièmes de l'unité. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\zeta_k - 1|^2 \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\zeta_k - 1|.$$

Résolution d'équations.

Exercice 29. Résoudre dans \mathbb{C} les équations algébriques suivantes :

$$(a) \quad x^2 - x - i + 1 = 0; \quad (b) \quad x^2 - (1+i)x - 6 - 2i = 0; \quad (c) \quad x^2 + (1-2i)x - (3+i) = 0;$$

$$(d) \quad x^3 - 1 + i = 0; \quad (e) \quad x^6 + x^3 + 1 = 0; \quad (f) \quad x^4 - 2ix^2 - 1 = 0;$$

$$(g) \quad 27(x-1)^6 + (x+1)^6 = 0; \quad (f) \quad x^n + 2x^{n-1} + \dots + 2x + 1 = 0; \quad (g) \quad (1+x)^{2n} = (1-x)^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 30. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation suivante :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0.$$

Exercice 31. Résoudre le système :
$$\begin{cases} u+v = -1 \\ uv = 1 \end{cases}$$

Exercice 32. Déterminer le module et un argument des racines du trinôme :

$$z^2 - 2(1 + \cos(\phi))z + 2(1 + \cos(\phi)) = 0.$$

Exercice 33. Résoudre les équations suivantes : (a) $\bar{z} = 2z^2$; (b) $z^3 = -16\bar{z}^7$; (c) $z^2 + \bar{z} = 2$.

Expressions trigonométriques.

Exercice 34. Linéariser les expressions suivantes :

$$(a) \quad \cos^3(\theta); \quad (b) \quad \sin^3(\theta)\cos^2(\theta); \quad (c) \quad \sin^4(\theta)\cos(\theta).$$

$$\text{Solutions : (a) } \frac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}; \quad (b) \frac{2\sin(\theta) + \sin(3\theta) - \sin(5\theta)}{16}; \quad (c) \frac{\cos(5\theta) - 3\cos(3\theta) + 2\cos(\theta)}{16}.$$

Exercice 35. Résoudre : (a) $\cos(x) + \sin(x) = 1$; (b) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

Exercice 36. Montrer que $\sin(5\theta) = P(\sin(\theta))$ où P est un polynôme de degré 5. Déterminer les racines de P . En déduire une valeur pour $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 37. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que $\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$ peut s'écrire comme un polynôme en $\cos(\theta)$. Déterminer un tel polynôme pour $n = 2$ et $n = 3$.