Feuille d'exercices 6 : **Géométrie élémentaire du plan**

Généralités.

Exercice 1. Soit A, B et C trois points non alignés du plan et p un réel. On considère les points A', B' et C' définis par :

$$\overrightarrow{AA'} = p\overrightarrow{AB} \ ; \ \overrightarrow{BB'} = p\overrightarrow{BC} \ ; \ \overrightarrow{CC'} = p\overrightarrow{CA}.$$

1. Les points A', B' et C' peuvent-ils être alignés ? Justifier.
2. Exprimer A' (resp. B', C') comme un barycentre des points A et B (resp. B et C, C et A).
3. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.

Exercice 2. La droite d'Euler. Soit ABC un triangle du plan. On note respectivement G, H et O son centre de gravité, son orthocentre et le centre de son cercle circonscrit.

1. Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Montrer que $M = H$. (Indication : exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ avec I milieu de $[BC]$; en déduire que $(AM) \perp (BC)$. Raisonner de même avec les autres points du triangle.)
2. En déduire que O, G et H sont alignés (c'est la droite d'Euler du triangle ABC) ou confondus.
3. Soit L le centre du cercle circonscrit au triangle dont les sommets sont les milieux des côtés du triangle ABC. Montrer que L est sur la droite d'Euler (si elle existe) du triangle ABC.

Exercice 3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. Montrer qu'un triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si :

$$a + jb + j^2 c = 0,$$

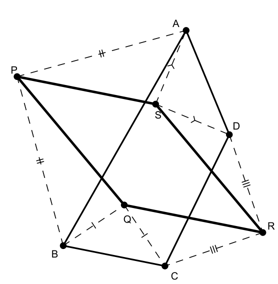
où a, b, c désignent les affixes respectives de A, B, C.

Exercice 4. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct. Soit A, B, C et C quatre points du plan deux à deux distincts. Sur les côtés du quadrilatère $ABCD$, on construit les triangles isocèles rectangles APB, CQB, CRD et ASD tels que :

$$\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\right) = \left(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}\right) = \left(\overrightarrow{RD}, \overrightarrow{RC}\right) = \left(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

On souhaite montrer que $PQRS$ est un parallélogramme. Pour tout point M, on note m l'affixe de M.

1. Montrer que $p = \frac{1}{2}\left(a(1+i) + b(1-i)\right)$. Puis donner une expression similaire pour q, r et s.
2. En déduire que $p + r = q + s$. Conclure.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les points A, B, C et D pour que $PQRS$ soit un rectangle.



Repères orthonormés, produit scalaire et déterminant.
Sauf mention contraire, le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 5. On considère un vecteur $\vec{u}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et le point $C(0,1)$.

1. Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}$ du vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u},\vec{v})$ est un base orthonormée directe de $\vec{P}$.
2. Soit A de coordonnées $(-1,1)$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer les coordonnées de A dans $(C,\vec{u},\vec{v})$

Réponse : $\overrightarrow{v}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$. $A=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 6. Soit $P(1,-1)$. Donner les coordonnées du point $M=O+2\vec{i}+\vec{j}$ dans le repère polaire attaché au point P. Réponse : $M=(-\frac{\sqrt{2}}{2},3\frac{\sqrt{2}}{2})$

Exercice 7. **Identités usuelles.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{P}$. Établir les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\
\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\
\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})
\end{aligned}$$

Soit ABC un triangle direct, on note $a=BC, b=AC, c=AB$. Retrouver *la formule d'Al Kâshi* :

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\,\cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

Exercice 8. **L'orthocentre**.

1. Montrer, en employant le produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
2. Soit ABC un triangle. On note O le centre et R le rayon du cercle circonscrit à ABC. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. On note respectivement α, β et γ les angles polaires des points A, B et C. Montrer que les coordonnées de l'orthocentre de ABC sont :

$$\left(R\left(\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma)\right),R\left(\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)\right)\right)$$

Exercice 9. Soit $A(1,1)$ et $\vec{u}(1,-1)$. Donner les coordonnées du projeté orthogonal d'un point $M(x,y)$ sur la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}(1,-1)$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et dirigé par un vecteur $\vec{u}$. Pour tout point M du plan, on note : $d(M,\mathcal{D})$ la distance de M à $\mathcal{D}$. Montrer l'égalité suivante :

$$AM^2=d(M,\mathcal{D})^2+\left(\overrightarrow{AM}.\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}\right)^2.$$

Remarque : faire aussi un dessin.

Exercice 11. Soit $k\in\mathbb{R}$. On considère les trois points suivants : $A(k^2,k^2)$, $B(-k,0)$, $C(1,k)$.
Calculer $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 12. Calculer l'aire du triangle formé par les points suivants : $A(1,1)$, $B(-1,3)$ et $C(3,\lambda)$. A quelle condition cette aire est-elle égale à 1 ?

Utilisation du produit scalaire et du déterminant. Droites et cercles.

Exercice 13. Soit ABC un triangle. Montrer que le centre de gravité G de ABC partage le triangle ABC en trois triangles ABG, BCG, CGA de même aire.

Exercice 14. On considère les points $A(-1,0)$, $B(2,4)$ et $C(3,3)$

1. Calculer l'aire du triangle ABC puis la distance de A à (BC).
2. Donner une équation de la droite (AB). En déduire la longueur de la hauteur issue de C.

1. Aire $= \frac{7}{2}$; distance $= \frac{7}{\sqrt{2}}$. 2. $4x - 3y + 4 = 0$; hauteur $= \frac{7}{5}$.

Exercice 15. Soit $R(1,4)$, $S(-4,2)$ et $T(3,-1)$. Préciser la nature du triangle RST et donner un équation cartésienne de la hauteur issue de R.
Réponses : RST est isocèle rectangle en ... ; $7x + 3y - 5 = 0$.

Exercice 16. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_k$ la droite d'équation catésienne : $(1-k^2)x + 2ky = 4k + 2$. Montrer que $\Omega(1,2)$ est équidistant de toutes les droites $\mathcal{D}_k$.

Exercice 17. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites d'équation $3x + 2y = 1$ et $4x + 3y = 5$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point Ω dont on donnera les coordonnées.
2. Soit $A(-5,5)$. Donner les coordonnées de B, projeté de A sur $\mathcal{D}$ parallèlement à $\mathcal{D}'$; de C projeté de A sur$\mathcal{D}'$ parallèlement à $\mathcal{D}$.
3. Calculer l'aire du parallélogramme $\Omega\,A\,B\,C$.
4. En déduire les distances de A à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 18. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équation cartésienne respective $2\,x + y = 0$ et $-2x + 4\,y + 1 = 0$. Déterminer des équations cartésiennes des bissectrices de ces deux droites.
Réponses : $6x - 2y - 1 = 0$; $2x + 6y + 1 = 0$.

Exercice 19. On considère les points O, $A(1,0)$ et $M(a,b)$.

1. A quelle condition les points O, A et M sont-ils alignés ?
2. Donner une équation cartésienne pour les médiatrices de $[OA]$ et de $[OM]$.
3. Donner l'équation du cercle circonscrit au triangle OAM.

Exercice 20. **Des lignes de niveau**. Soit $k \geq 0$ et A, B deux points du plan. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1. $MA^2 + MB^2 = k$.
2. $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Exercice 21. On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$, avec $\alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma$. Soit $T(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en M.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $A(-\alpha, -\beta)$ et de rayon $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 = \gamma}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AT}$ est vecteur normal à $\mathcal{D}$.
3. En déduire qu'une équation de $\mathcal{D}$ est donnée par : $x(x_0 + \alpha) + y(y_0 + \beta) + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$.

Exercice 22. Soit Γ l'ensemble des cercles passant par le point $A(2,1)$ et tangents à la droite d'équation $4\,x - 3\,y - 10 = 0$.
Montrer qu'il existe dans Γ un unique cercle de rayon minimal dont on déterminera une équation cartésienne.