Feuille d'exercices 7 : **Géométrie élémentaire de l'espace.**

Sauf mention contraire, l'espace affine E est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est alors une base orthonormée directe de $\overrightarrow{E}$.

Outils de la géométrie dans l'espace : produit scalaire, produit vectoriel et déterminant.

Exercice 1. Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par O et dont $\overrightarrow{n}(0,1,1)$ est un vecteur normal.

1. Donner un vecteur directeur directeur de la droite $\mathcal{D}$ normal à $\mathcal{P}$ et passant par O.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,0,0)$ et $\overrightarrow{v}(0,-1,1)$ sont-ils dans $\overrightarrow{P}$? Est-ce que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathcal{P}$? Si oui, est-elle orthonormée ?
3. Déterminer les coordonnées de H (resp. H') projeté orthogonal de $M(a,b,c)$ sur $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{D}$). Ecrire si possible $\overrightarrow{OH}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Solutions : $H'(0, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2})$; $H(a, \frac{b-c}{2}, \frac{c-b}{2})$; $\overrightarrow{OH} = a\overrightarrow{u} + \frac{c-b}{2}\overrightarrow{v}$.

Exercice 2. Même exercice que le précédent avec $\mathcal{P}$ passant par $A(0,0,1)$ et dont $\overrightarrow{n}(1,-1,0)$ est un vecteur normal puis avec $\overrightarrow{u}(1,1,0)$ et $\overrightarrow{v}(0,0,1)$.
Solutions : $H'(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}, 1)$; $H(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c+1)$; $\overrightarrow{AH} = \frac{a+b}{2}\overrightarrow{u} + c\overrightarrow{v}$.

Exercice 3. Pour les trois couples de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ci-dessous, calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$:
1. $\overrightarrow{u}(1,-1,1)$ et $\overrightarrow{v}(1,3,0)$ 2. $\overrightarrow{u}(12,-6,24)$ et $\overrightarrow{v}(5,0,-15)$ 3. $\overrightarrow{u}(1,2,-6)$ et $\overrightarrow{v}(-5,-10,30)$
Solutions : 1. $(-3,1,4)$; 2. $(90,300,30)$; 3. $\overrightarrow{0}$

Exercice 4. Considérons les trois points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $M(1,1,x)$.

1. Lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, montrer que M parcours une droite dont on précisera un point et un vecteur directeur. Montrer que les points A, B et M ne sont pas alignés.
2. Donner l'aire du triangle ABM.
3. En déduire la longueur de la hauteur issue de M dans le triangle ABM.

Solutions : 2. $\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2}$; 3. $\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}$.

Exercice 5. Soit $OABC$ un tétraèdre rectangle (i.e. un polyèdre à 4 faces tel que $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux) en O.
Établir le résultat suivant attribué à Descartes :
« Le carré de l'aire du triangle ABC est égale à la somme des carrés des aires des triangles OAC, OAB et OBC. »

Exercice 6. **Double produit vectoriel** Etant donné trois vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, montrer que :

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{u}$$

et que
$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{w}$$

A quelle condition a-t-on $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$?
Indication : se placer dans une bonne base.

Exercice 7. Division vectorielle

1. Peut-on trouver un vecteur $\overrightarrow{e}$ de l'espace tel que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ on a
$$\overrightarrow{e}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{e}=\overrightarrow{u}\quad ?$$

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On se propose de déterminer l'ensemble S des vecteurs $\overrightarrow{x}$ de l'espace tels que :
$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}.$$

2. Déterminer S lorsque $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.
3. On suppose désormais que $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$. Déterminer S lorsque $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$.
4. Déterminer S lorsque $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.
5. On suppose désormais que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$. On note S_0 l'ensemble des solutions de l'équation homogène $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$.
   (a) Supposons qu'il existe $\overrightarrow{s}\in S$. Montrer qu'on a l'égalité :
   $$S=\{\overrightarrow{x}\text{ vecteur de l'espace },\ \overrightarrow{x}=\overrightarrow{s}+\overrightarrow{x_0},\ \overrightarrow{x_0}\in S_0\}.$$
   (b) En déduire que :
   $$S=\left\{\frac{\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}+\lambda\overrightarrow{u},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :
   $$\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}.$$

Exercice 8. Pour les trois triplets de vecteurs $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ci-dessous, calculer le déterminant $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$:

1. $\overrightarrow{u}(0,0,1)$, $\overrightarrow{v}(-1,1,0)$, $\overrightarrow{w}(2,2,1)$.
2. $\overrightarrow{u}(30,10,0)$, $\overrightarrow{v}(4,2,-2)$, $\overrightarrow{w}(5,5,15)$.
3. $\overrightarrow{u}(37,7,1)$, $\overrightarrow{v}(3,3,9)$, $\overrightarrow{w}(40,10,10)$

Réponses : 1. -4 *; 2.* 500 *; 3.* 0.

Exercice 9. Calculer le volume du parallélipipède construit sur les vecteurs
$$\overrightarrow{u}(-1,1,1),\ \overrightarrow{v}(1,2,-1),\ \overrightarrow{w}(0,1,1).$$
En déduire la distance du point $A(0,1,1)$ au plan $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
Réponses : Volume = 3. Distance = $\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Exercice 10. Soient $\overrightarrow{u}(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{-1}{3})$, $\overrightarrow{v}(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ et $\overrightarrow{w}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Montrer que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ définit une B.ON. Calculer $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$. La base est-elle directe ?
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{t}(1,1,1)$ dans la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$.

Exercice 11. Soient $A(0,1,0)$, $B(1,1,x)$,$C(y,3,3)$ et $D(0,2,1)$. où x et y sont deux paramètres réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que A, B, C et D soient coplanaires.
Réponse : $xy=1$.

Exercice 12. Soient $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{t}$ quatre vecteurs de l'espace. Montrer qu'on a l'égalité :
$$\det(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{y},\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{z},\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{t})=0.$$

Droites, plans et sphères de l'espace.

Exercice 13. **Le plan médiateur**. Soient A et B deux points de l'espace.

1. Montrer que l'ensemble des points équidistants de A et B est un plan (appelé plan médiateur). On en donnera un point et un vecteur normal.
2. Soit $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et O l'origine du repère. Donner une équation cartésienne du plan médiateur de OA.

Exercice 14. Dans chacun des cas ci-dessous, former une équation cartésienne du plan :

1. passant par A, dirigé par $\overrightarrow{u}(1,-1,2)$ et $\overrightarrow{v}(2,1,-3)$.
2. passant par $A(1,0,0)$, $B(1,-1,0)$ et $C(2,1,2)$.
3. passant par $A(1,-1,1)$ de vecteur normal $\overrightarrow{v}(0,-1,1)$.

Solutions : 1. $x+7y+3z-28=0$. *2.* $-2x+z+2=0$.*3.* $-y+z-1=0$.

Exercice 15. On onsidère deux points A et B distincts et un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul.

1. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour qu'il existe un plan passant par A et B de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
2. On se donne un réel t et $A(t,-1,-2)$ et $B(3,t,t)$. Former, lorsque c'est possible, une équation cartésienne du plan normal à $\overrightarrow{n}(1,2,-2)$ et passant par A et B.

Exercice 16. Soient A, B, C et D quatres points non coplanaires. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})$$

Exercice 17. Etant donné deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, d'équations normalisées respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$. Déterminer l'ensemble des points équidistant de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ lorsque :

1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.
2. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.

L'ensemble trouvé dans le second cas est la réunion des deux **plans bissecteurs**. Que peut-on dire de ces deux plans ?

Exercice 18. Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x-3\,y+z-4=0$ et $A(-1,2,1)$, $B(1,-6,-1)$ et $C(2,2,2)$ des points de l'espace. Déterminer une équation du plan H contenant les points A, B et C. Les plans $\mathcal{P}$ et H sont-ils sécants ?
Solutions : $x+y-3z+2=0$

Exercice 19. Soient $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(0,-1,0)$ dirigée par $\overrightarrow{u}(1,2,1)$ et le point $B(2,1,1)$.

1. Donner un système d'équation pour $\mathcal{D}$.
2. Déterminer la distance de B à $\mathcal{D}$
3. Donner une équation du plan passant par B et $\mathcal{D}$.

solutions : 1. $\left\{\begin{array}{ccc} x & = & z \\ 2x-y-1 & = & 0 \end{array}\right.$ 2. $\sqrt{\frac{5}{6}}$; 3. $y-2z+1=0$.

Exercice 20. Déterminer tous les réels k, tels que les deux droites suivantes aient au moins un point d'intersection :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+kz-1 & = & 0 \\ y-z-1 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} y+2z & = & 0 \\ -x+z-3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Solution : Déterminer un point et un vecteur directeur de chaque droite puis exprimer que les droites ont un point d'intersection ssi leur distance est nulle.

Exercice 21. On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation $2x-4y+3z+5=0$ et $x-2y+3z-2=0$.

1. Sont-ils sécants ? Si, oui donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et un point I de la droite formée par l'intersection.
2. Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(2,-2,0)$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

Solutions : 1. Oui ; $I(-7,0,3)$ et $\overrightarrow{u}(2,1,0)$; 2. $2x+y-2=0$.

Exercice 22. Dans les deux cas ci-dessous, donner une perpendiculaire commune aux deux droites.

1. $\mathcal{D}_1$ passant par O de direction $\overrightarrow{u}(1,0,0)$ et $\mathcal{D}_2$ passant par $A(0,0,1)$ de direction $\overrightarrow{v}(0,1,-1)$.
2.
$$\mathcal{D}_1 \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+5y+z-9 & = & 0 \\ x+3y+2z-5 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+-3z-7 & = & 0 \\ x+2y-z-5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Solutions : 1. $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & z \end{array}\right.$ 2. $\left\{\begin{array}{rcl} x+8y+17z-10 & = & 0 \\ -x+4y+7z-13 & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 23. Soit M le point de coordonnées sphériques : $(R=1,\phi,\theta)$ (cf. fiche pour les notations). Donner l'équation du plan tangent à la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ passant par M.

Exercice 24. Soient quatre points de l'espace $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,1,2)$ et $D(1,0,-1)$.

1. Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. Montrer Déterminer le centre Ω et le rayon de la sphère circonscrite à $ABCD$.

Solutions : 2. $\Omega(1,1,1)$ et $R=\sqrt{5}$.

Exercice 25. Considèrons la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-2y+2z+1=0$.

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R de $\mathcal{S}$.
2. Montrer que l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{S}$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre r et le rayon ω.
3. Soit $M(a,b,c)\in\mathcal{C}$. Former une équation du plan tangent $\mathcal{T}$ à $\mathcal{S}$ en M. Donner une paramétrisation de la droite $(\Omega\omega)$, puis en déduire l'intersection de cette droite avec le plan $\mathcal{T}$.

Solutions : 1.$\Omega(1,-2,-2)$ *;* $R=2$. *2.* $\omega\left(\frac{7}{9},-\frac{14}{9},-\frac{22}{9}\right)$ *;* $r=\frac{4}{3}\sqrt{2}$. *3.* $(-1,2,-6)$.

Exercice 26. Soit A,B,C et D quatre points non-coplanaires de l'espace et G l'isobarycentre de ces quatre points. Montrer que G partage le tétraèdre $ABCD$ en quatre tétraèdres $ABCG$, $ABDG$, $ACDG$ et $BCDG$ de même aire.