

Feuille d'exercices 3 : **Fonctions usuelles d'une variable réelle***Logarithmes et exponentielles...***Exercice 1.** *Universalité du logarithme.*

Montrer que toute fonction non nulle de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} , dérivable et qui *transforme les produits en somme* est un logarithme dans une certaine base.

Exercice 2. Soient x et y deux réels strictement plus grand que 1. Montrer l'inégalité suivante :

$$\sqrt{\ln x \ln y} \leq \ln \left(\frac{x+y}{2} \right).$$

Indication : montrer et utiliser l'inégalité : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

Exercice 3. Résoudre l'équation suivante :

$$x^3 + \ln |x| = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, strictement positive, dérivable, croissante et telle que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq \frac{1}{e},$$

Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)^{f(x)}$ définie sur I est croissante.

Exercice 5. Pour quels réels x l'expression $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ a-t-elle un sens ?

Soit a un réel strictement positif fixé. On considère la fonction :

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

Tracer le tableau de variation de f . Déterminer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes :

1. $n^m = m^n$, où m et n sont des entiers strictement positifs.
2. $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$, où $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{e^x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + \ln x}{e^x + x} \right)$$

Exercice 8. Montrer que la fonction exponentielle n'est pas égale à une fraction rationnelle.

Exercice 9. Etudier les variations des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition :

$$\text{a) } x \mapsto e^x + e^{1+\frac{1}{x}} \quad \text{b) } x \mapsto |x|^{\frac{1-x}{x}} \quad \text{c) } x \mapsto \frac{a^x + 1}{e^x + 1} \quad (a > 1) \quad \text{d) } x \mapsto \frac{\ln^\alpha x}{x} \quad (\alpha > 1)$$

Fonctions hyperboliques et réciproques.

Exercice 10. Formulaire. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Exprimer $\text{ch}(x+y)$, $\text{sh}(x+y)$, $\text{ch}(x-y)$ et $\text{sh}(x-y)$ à l'aide de $\text{ch } x$, $\text{sh } x$, $\text{ch } y$, $\text{sh } y$. En déduire l'expression de $\text{th}(x+y)$ et $\text{th}(x-y)$ en fonction de $\text{th } x$ et $\text{th } y$. En déduire enfin $\text{ch}(2x)$, $\text{sh}(2x)$ et $\text{th}(2x)$, en fonction de $\text{ch } x$, $\text{sh } x$ et $\text{th } x$
- En déduire une expression pour les produits $\text{ch } x \text{ch } y$, $\text{sh } x \text{sh } y$ et $\text{sh } x \text{ch } y$.
- En déduire enfin une expression pour les sommes $\text{ch } x + \text{ch } y$, $\text{sh } x + \text{sh } y$ et les différences $\text{ch } x - \text{ch } y$, $\text{sh } x - \text{sh } y$
- On pose $t = \text{th}(x/2)$. Montrer les formules suivantes :

$$\text{ch } x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \text{sh } x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \text{th } x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Exercice 11. Etant donné $(a, b) \in (\mathbb{R})^2$, résoudre le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} \text{ch } x + \text{ch } y = a \\ \text{sh } x + \text{sh } y = b \end{cases}$$

Exercice 12. Etudier la fonction u définie par $u(x) = \frac{\ln(\text{ch } x)}{x}$.

Exercice 13. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les sommes :

$$A_n = \sum_{k=0}^n \text{ch}(a+kb) \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^n \text{sh}(a+kb).$$

Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$. En déduire A_n et B_n .

Exercice 14. Expression logarithmiques des fonctions hyperboliques réciproques.

- Etant donné $y \in \mathbb{R}$, résoudre de deux manières l'équation :

$$y = \text{ch } x, \quad x \in [0; +\infty[.$$

En déduire une expression pour la fonction Argch utilisant des fonctions *usuelles*.

2. Même question pour les équations suivantes :

$$y = \operatorname{sh} x, x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y = \operatorname{th}(x), x \in \mathbb{R}.$$

En déduire des expressions pour les fonctions Argsh et Argth utilisant des fonctions *usuelles*.

Fonctions trigonométriques et réciproques.

Exercice 15. Une dernière fonction trigonométrique

La fonction *cotangente* est définie par :

$$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

1. Donner une relation entre les fonctions \tan et cotan .
2. Etudier la fonction cotan . Tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
3. Montrer, lorsque cela a un sens, que $\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$. En déduire la dénomination "co"-tangente.
4. Placer la cotangente d'un angle sur le cercle trigonométrique. En déduire une méthode géométrique de détermination de l'inverse d'un nombre réel.

Exercice 16. Calculer les valeurs suivantes :

$$\operatorname{Arcsin}(1); \operatorname{Arcsin}(\frac{1}{2}); \operatorname{Arccos}(-1); \operatorname{Arccos}(0); \operatorname{Arccos}(-\frac{\sqrt{2}}{2}); \operatorname{Arctan}(-1); \operatorname{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{3}}); \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}).$$

$$\operatorname{Arcsin}(\sin(\pi)); \operatorname{Arccos}(\frac{7\pi}{4}).$$

Exercice 17. Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$:

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 18. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Exercice 19. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\operatorname{Arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\operatorname{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 20. Etude et représentation graphique de la fonction $\operatorname{Arcsin}(\sin(2x))$.