TD : Equations différentielles et la méthode d'Euler.

1 Les équations différentielles avec Maple

Le logiciel Maple permet de résoudre des équations différentielles. La résolution se fait à l'aide de la commande `dsolve`.
Vous êtes invité à utiliser l'aide Maple pour connaître la syntaxe et les paramètres de la fonction `dsolve`.

Exercice 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = -ty$ (noter au passage que Maple introduit ses propres constantes). Déterminer la solution qui vérifie $y(1) = 2$.

Exercice 2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = xe^x$.
A quoi correspondent $\_C1$ et $\_C2$?
Quelle est la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$?

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle : $y' + 2ty - e^{t-t^2} = 0$. Représenter sur un même graphe les solutions pour les conditions initiales $y(0) = k$ où k est un entier variant de -5 à 5.

Il est bien entendu possible de résoudre des équations qui ne sont pas linéaires. Cependant certaines équations ne peuvent être résolues formellement. Il faut alors faire appel à des *méthodes numériques* (comme la méthode d'Euler).

Exercice 4. Résoudre l'équation $(E)\ \ y' + sin(y) = t$ avec la condition $y(0) = 0$. Utiliser le paramètre `numeric` puis calculer $f(2)$ où f est une solution approchée de l'équation (E). A l'aide de la fonction `odeplot` qui fait partie du package `plots` tracer la fonction f.

La fonction `DEplot` qui fait partie du package `DEtools` permet également de tracer les courbes obtenues par résolution numérique.

Exercice 5.

1. Résoudre $(E)\quad : y' = y^2 + 1$
2. Quelle est la solution telle que $y(0) = 1$? Tracer cette solution à l'aide de la commande `DEplot`.
3. Tracer sur le même graphique les solutions telles que $y(k) = 1$, pour $0 \leq k \leq 6$.

2 La méthode d'Euler

L'objectif de cette partie est de réaliser une procédure `Euler` qui donne la fonction affine par morceaux obtenue à l'aide de la méthode d'Euler pour la résolution approchée de l'équation avec condition initiale :

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où a et b sont des fonction continue d'un intervalle $[t_0, t_0 + Nh]$ avec $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $h > 0$ qui est le pas de la subdivision.

Exercice 6. Réaliser une telle procédure. Les variables d'entrée sont : a, b, t_0, y_0, N et h. En sortie, nous souhaitons avoir la liste des points (t_n, y_n) obtenus par la méthode d'Euler (cf. cours).

Exercice 7. Tester votre procédure sur l'équation $y' = y$ et représenter la solution approchée et la solution exacte sur un même graphe.