# TD 1 : quelques notions de logique

## 1 Généralités sur les propositions

### 1.1 Vocabulaire

**Définition 1.1.** *Une proposition est un énoncé concernant un objet ou une relation entre objets mathématiques.*

**Exemples de propositions :**
- « la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ est croissante »,
- « la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sin(x)$ est bornée ».
- « si $x^2 = y^2$ alors $x = y$ ».
- $P(n) =$ « L'entier $n$ est pair et $n \geq 0$ ».
- « $\pi$ est un nombre rationnel si et seulement si $1 + \pi$ est un nombre rationnel ».

On affecte aux propositions une valeur de vérité : une proposition est soit vraie soit fausse (c'est le principe du tiers exclu).

Le "travail" du mathématicien est de déterminer si une proposition est vraie ou fausse. Il procède par déduction à partir de propositions qu'il sait être justes ou de propositions admises comme vraies (un *axiome*). La logique mathématique est l'étude des règles que doit respecter une déduction correcte.

### 1.2 Les connecteurs logiques

A partir d'une ou plusieurs propositions, on peut construire d'autres propositions à l'aide de la négation et des connecteurs *ou*, *et*.

**Définitions 1.2.**
- *Si $P$ est une proposition, on appelle « non $P$ » (ou $\bar{P}$) la négation de $P$.*
- *Si $P$ et $Q$ sont des propositions, on peut considérer :*
  - *la proposition « $P$ ou $Q$ ».*
  - *la proposition « $P$ et $Q$ ».*

La proposition « $P$ ou $Q$ »est vraie lorsqu'au moins une des deux propositions $P$ et $Q$ est vraie.
La proposition « $P$ et $Q$ »est vraie lorsque les deux propositions $P$ et $Q$ sont vraies.

Les connecteurs *ou* et *et* se comportent vis à vis de la négation de la manière suivante :

**Propriétés 1.3.**
- *les propositions « non $(P$ et $Q)$ » et « $($non $P)$ ou $($non $Q)$ »ont les mêmes valeurs de vérité.*
- *les propositions « non $(P$ ou $Q)$ » et « $($non $P)$ et $($non $Q)$ »ont les mêmes valeurs de vérité.*
- *la proposition « (non $P$) et $P$ »est toujours fausse ; la proposition « $($non $P)$ ou $P$ »est toujours vraie.*

**Exercice 1.** Quelle est la négation de la proposition $P(n)$ précédente ?

L'implication correspond au raisonnement classique : "si...alors" ; il se définit de la manière suivante :

**Définitions 1.4.** *Soit $P$ et $Q$ des propositions.*
- *La proposition $P \Rightarrow Q$ ($P$ implique $Q$) est définie par « $\bar{P}$ ou $Q$ ». On dit que $P$ est la proposition suffisante et $Q$ la proposition nécéssaire.*
- *La proposition $P \Leftrightarrow Q$ ($P$ est équivalent à $Q$) est définie par : « $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ ».*

Voyons quelques propriétés élémentaires dans l'écriture de propositions à l'aide de connecteurs :

**Propriétés 1.5.** *Soit $P$, $Q$ et $R$ des propositions. On dispose des règles suivantes :*
- *(non (non($P$) ) $\Leftrightarrow P$.*
- *($P$ ou $Q$) ou $R \Leftrightarrow P$ ou ($Q$ ou $R$) $\Leftrightarrow P$ ou $Q$ ou $R$.*
- *$P$ et ($Q$ ou $R$) $\Leftrightarrow$ ($P$ et $Q$) ou ($P$ et $R$).*
- *mêmes règles que les précédentes en échangeant ou et et.*

## 1.3 Tables de vérité

Il est intéressant d'étudier les valeurs de vérité des propositions construites à partir de propositions initiales. On indique dans une *table de vérité* les valeurs de vérité d'une proposition à partir des valeurs de vérité des propositions initiales.

On attribue la valeur 1 au caractère « vrai »et la valeur 0 au caractère « faux ».

**Exemples :**

| $P$ | $\bar{P}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $P$ | $Q$ | $P$ ou $Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $P$ | $Q$ | $P$ et $Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 1 | 1 | |

**Exercice 2.** Vérifier à l'aide de tables de vérité les assertions de la propriété 1.3.

**Exercice 3.** Ecrire les tables de vérité des propositions « $P \Rightarrow Q$ » et « $P \Leftrightarrow Q$ ».

## 1.4 Quelques propriétés de l'implication

Nous allons voir dans cette partie quelques propriétés de l'implication. Nous verrons plus tard comment s'en servir pour démontrer...

**Exercice 4.** Traduire formellement l'énoncé suivant et vérifier qu'il est bien vrai :« Si $P$ est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie alors $Q$ est vraie. »

**Exercice 5.** (Transitivité de l'implication). Etant données des propositions $P$, $Q$ et $R$, montrer que la proposition ci-dessous est vraie :

$$[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

**Exercice 6.** (Contraposée). Etant données des propositions $P$ et $Q$, montrer que la proposition ci-dessous est vraie :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P).$$

# 2 Les quantificateurs

## 2.1 Généralités

Les quantificateurs sont des symboles permettant d'écrire des énoncés mathématiques de manière plus synthétique :
– $\forall$ : quantificateur universel. Il signifie "quel que soit", "pour tout"...
– $\exists$ : quantificateur existentiel. Il signifie "il existe (au moins un)"...
**Exemple.** $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2$.

**Exercice 7.** Ecrire à l'aide de quantificateurs la proposition suivante : « L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée. »

**Exercice 8.** Laquelle des deux propositions ci-dessous est juste ?
– $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0 \Rightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$
– $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0 \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0)$ ou $(g(x) = 0)$

Attention, lorsqu'on change l'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans un enoncé, on change le sens de l'énoncé.

**Exercice 9.** Laquelle des deux propositions ci-dessous est juste ?

1. « $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \leq n$ ».
2. « $\forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ m \leq n$ »

On peut cependant intervertir l'ordre de deux quantificateurs identiques sans changer le sens (la proposition peut cependant rester vraie).

## 2.2 Négation

Notons $P(x)$ une proprosition dépendante de $x$.

1. La proposition « non $(\forall x,\ P(x))$ » est équivalente à « $\exists x,$ non $P(x)$ ».
2. La proposition « non $(\exists x,\ P(x))$ » est équivalente à « $\forall x,$ non $P(x)$ ».

**Exemple.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Le contraire de la proposition « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 0$ ».

**Exercice 10.** Ecrire à l'aide de quantificateurs la négation des propositions suivantes :
– La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée.
– la fonction $f$ est nulle sur l'intervalle $]0; +\infty[$
– $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) > f(y)$.
– $\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ (|x| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \epsilon)$