

Etude métrique des courbes planes

Nous étudions les propriétés métriques des courbes paramétrées du plan euclidien. Ces notes de cours récapitulent les définitions et formules importantes associées à cette étude.

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . On rappelle qu'un arc (ou courbe) paramétré(e) (I, f) est la donnée d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}^2$ et d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Cette fonction sera supposée au moins de classe \mathcal{C}^1 . On pose $f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

Rappel. Soient deux points du support de $f : M_1 = f(t_1)$ et $M_2 = f(t_2)$ avec $t_1 < t_2$. On appelle longueur de l'arc $\widehat{M_1M_2}$ le nombre :

$$L_f(M_1M_2) = \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

1 La question de la paramétrisation

1.1 Généralités

Définition 1. Soit (I, f) un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 .

On dit φ est un paramétrage admissible pour l'arc (I, f) si φ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 de J vers I telle que φ' ne s'annule pas.

Les arcs (I, f) et $(J, f \circ \varphi)$ ont donc le même support ; c'est la manière de parcourir ce support qui change.

On dit qu'un arc (I, f) est un **paramétrage normal** lorsque pour tout $t \in I$, on a $\|f'(t)\| = 1$. Autrement dit l'arc est parcouru à vitesse constante égale à 1.

Exemple. Le cercle de centre O de rayon 1 paramétré par $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in I = [0, 2\pi]$ est un paramétrage normal ; ce n'est plus le cas en choisissant $(\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in J = [0, \pi]$.

1.2 Abscisse curviligne

Tout arc paramétré admet un paramétrage normal. On considère pour cela l'**abscisse curviligne**. On suppose maintenant que tous les arcs considérés sont réguliers (i.e. sans point singulier).

Définition 2. Une abscisse curviligne est une application s de classe \mathcal{C}^1 sur I telle que

$$\forall t \in I, s'(t) = \|f'(t)\|$$

Choisissons un point $M_0 = f(t_0)$ du support. La position d'un point mobile $M = f(t)$ sur la courbe est repéré par son abscisse curviligne s qui mesure la longueur algébrique de l'arc $\widehat{M_0M}$. Cette abscisse est donnée par la formule :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$$

Il est souvent pratique de reparamétriser un arc à l'aide d'une abscisse curviligne. Dans la suite la fonction s sera vu comme une nouvelle variable.

Propriété 1.1. Soit (I, f) un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 . L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible pour l'arc (I, f) .

Soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que pour tout $t \in J$ on a $g(s) = f(t)$. Alors (J, g) est un paramétrage normal de l'arc.

2 Repère mobile de Frenet

2.1 Généralités

Soit (I, f) un arc régulier. Notons $M(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ un point mobile de l'arc. On utilise souvent comme base de projection pour les vecteurs vitesse et accélération une base attachée au point M appelée **base de Frenet**.

Définition 3. Soit (I, f) un arc régulier et $M(t)$ un point mobile du support de l'arc. On appelle repère de Frenet le repère $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ avec

- $\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ le vecteur unitaire tangent en M (dirigé dans le sens du mouvement).
- $\vec{N}(t)$ le vecteur unitaire directement normal à $\vec{T}(t)$.

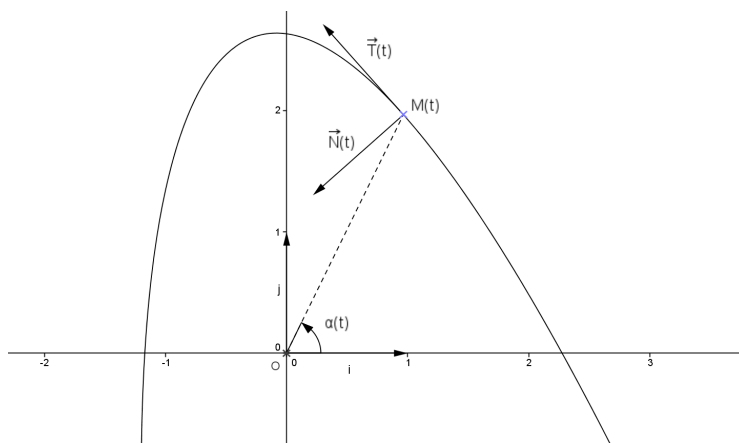


FIGURE 2.1 – Le repère de Frenet

Exprimons le vecteur vitesse dans la **base de Frenet**. Notons s une abscisse curviligne pour de f ; soit la quantité $v = \frac{ds}{dt} = \|f'(t)\|$: c'est la norme de la vitesse instantanée du point M .

$$\frac{df}{dt} = v\vec{T}$$

En particulier nous avons la relation $\frac{df}{ds} = \vec{T}$.

2.2 Paramètre angulaire

Nous avons le résultat suivant (voir figure précédente) :

Théorème 2.1. *Supposons que l'arc (I, f) est de classe C^2 . Alors il existe une fonction de classe C^1 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j}.$$

3 Courbure d'un arc

Dans ce paragraphe, on considère un arc régulier de classe C^2 et admettant un paramétrage normal. On note α le paramètre angulaire défini dans le paragraphe précédent :

$$\vec{T}(s) = \cos(\alpha(s))\vec{i} + \sin(\alpha(s))\vec{j}.$$

Définition 4. On appelle **courbure** au point $M(s)$ le réel $\gamma(s) = \alpha'(s)$.

Un point M est dit **bi-régulier** si sa courbure n'est pas nulle.

On appelle **rayon de courbure** en un point $M(s)$ bi-régulier le réel $R(s) = \frac{1}{\gamma(s)}$. Le centre de courbure au point M est le point C tel que $\vec{MC} = R\vec{N}$.

Proposition 3.1. Nous avons les **formules de Frenet** :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N} \text{ et } \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\vec{T}$$

Exprimons le vecteur accélération dans la **base de Frenet**. On note toujours $v = \frac{ds}{dt}$ la norme de la vitesse.

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

Le calcul du rayon de courbure peut se faire en coordonnées cartésiennes sans trop de difficultés (calculer le déterminant des vecteurs vitesse et accélération dans les bases orthonormées directes (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{T}, \vec{N})). Il vient la formule :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$$

Dans la figure ci-dessous l'arc paramétré est donné par $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 - t^2 \end{cases}$

On a représenté le cercle de centre C et de rayon R (rayon de courbure) au point M à l'instant $t = \frac{1}{2}$.

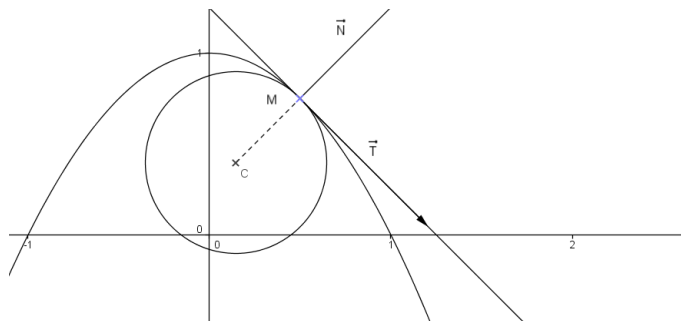


FIGURE 3.1 – Cercle osculateur