

ANNEXE ANALYSE DE FOURIER

1. REPRESENTATION DE FOURIER

1.1 Représentation d'un signal sinusoïdal

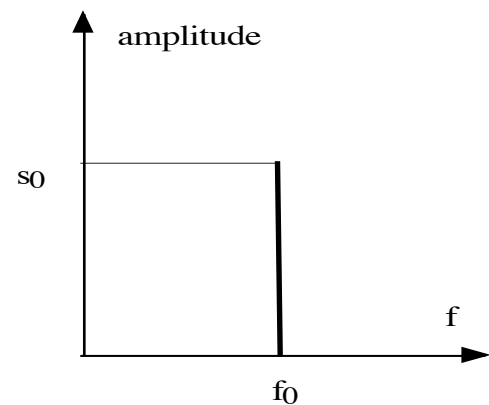
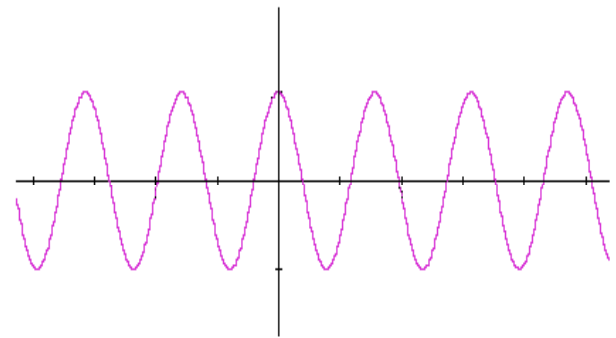
On peut représenter un signal sinusoïdal de la forme $s(t) = s_0 \cos \omega t = s_0 \cos(2\pi f_0 t)$ par son graphe en fonction du temps sous la forme :

Rq. Mathématiquement le domaine de définition de cette fonction s'étend de $-\infty$ à $+\infty$...

Il va s'avérer commode et utile de privilégier les deux informations que sont l'amplitude s_0 et la fréquence f_0 du signal dans un graphe portant l'amplitude en ordonnées et la fréquence en abscisses.

Dans un tel graphe, la fonction ci-dessus est symbolisée par un « trait » vertical de hauteur s_0 à l'abscisse f_0 :

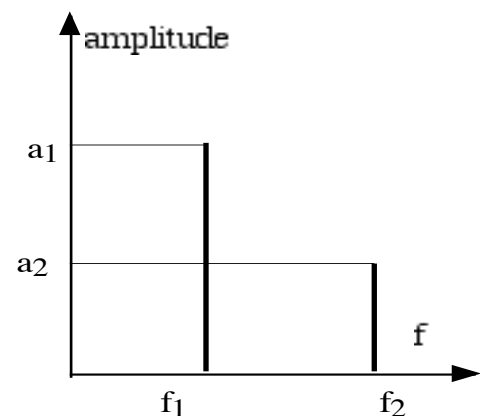
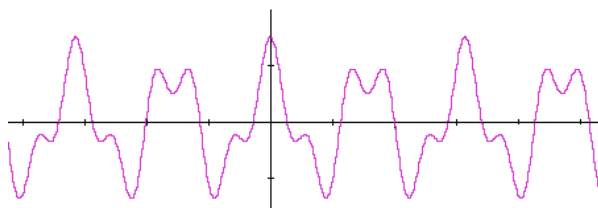
Rq. La représentation de Fourier ne prend pas en compte un éventuel déphasage et serait identique pour le signal $s'(t) = s_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$.



1.2 Représentation d'un signal « multi fréquences »

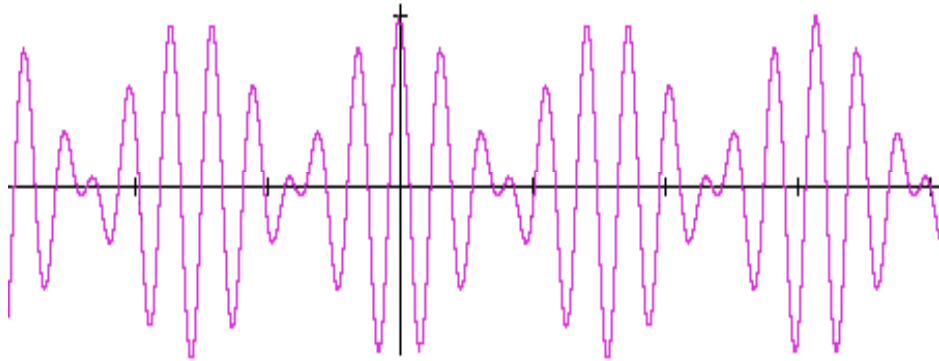
1.2.1 Signal somme de deux signaux sinusoïdaux de fréquences f_1 et f_2

De même, le signal $s(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cos(2\pi f_2 t)$ sera plus facilement interprété par son spectre de Fourier que par son graphe temporel :



1.2.2 Signal produit de deux signaux sinusoïdaux de fréquences f_1 et f_2

Considérons à présent le signal $s(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t) \times a_2 \cos(2\pi f_2 t)$. Son graphe temporel est de la forme :

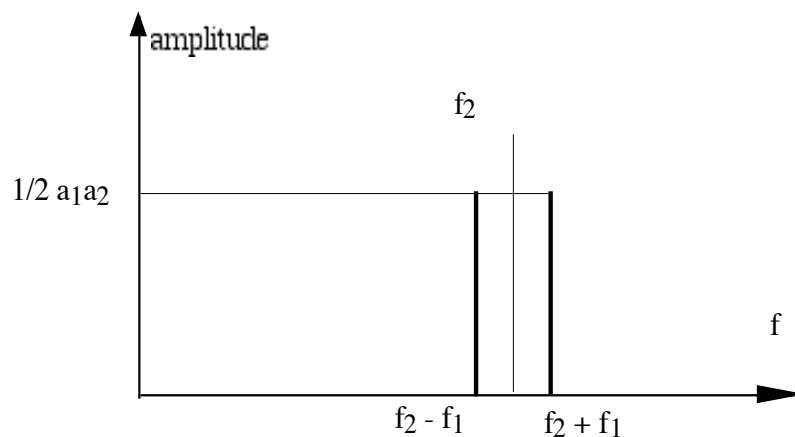


Rq. Pour le graphe on a choisi $f_2 = 10 f_1$. Cette différence permet de faire apparaître les deux fréquences, la fréquence « lente » modulant en amplitude la fréquence « rapide ».

Cependant, **au sens de Fourier**, qui privilégie une décomposition du signal en **somme de signaux de fréquences différentes**, ce signal **n'est pas constitué des fréquences f_1 et f_2** . En effet, si on linéarise l'expression précédente en :

$$s(t) = \frac{1}{2} a_1 a_2 [\cos(2\pi(f_2 - f_1)t) + \cos(2\pi(f_2 + f_1)t)]$$

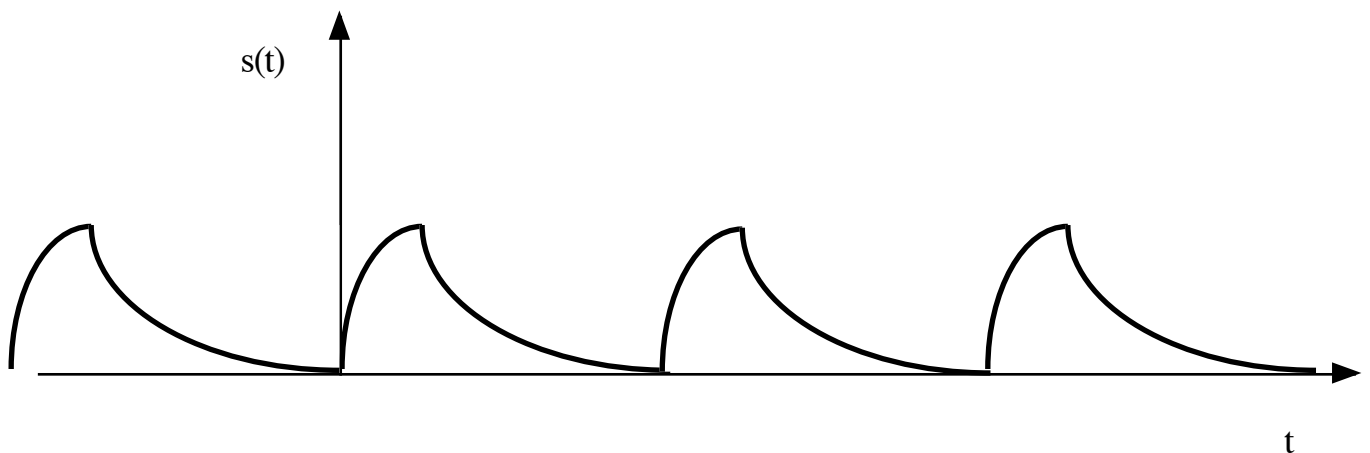
Sa représentation de Fourier est :



2. DEVELOPPEMENT D'UNE FONCTION PERIODIQUE EN SERIE DE FOURIER

2.1 Fondamental et harmoniques - Coefficients de Fourier

Considérons à présent un signal $s(t)$ **périodique quelconque**, de période T_0 , et donc de fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Moyennant certaines conditions de continuité supposées réunies dans les domaines de la physique étudiés, ce signal **périodique**, est représentable par une somme de signaux sinusoïdaux, appelée **série de Fourier**.



On obtient alors le **développement en série de Fourier** (DSF) du signal sous la forme :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t)$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos 2\pi n f_0 t dt \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \sin 2\pi n f_0 t dt$$

Rq. Le premier terme à la série est noté ainsi pour le faire correspondre avec les a_n en faisant $n = 0$.

Comme on le voit, le DSF du signal périodique est infini mais discret. Il comporte :

- une composante continue qui n'est autre que la **valeur moyenne** $\langle s(t) \rangle$ de $s(t)$
- une composante sinusoïdale de même fréquence que celle de $s(t)$ et appelée **fondamental**
- une série de composantes sinusoïdales de fréquences multiples entières $f = n f_0$ de celle de $s(t)$ et appelées **harmoniques**.

Propriétés :

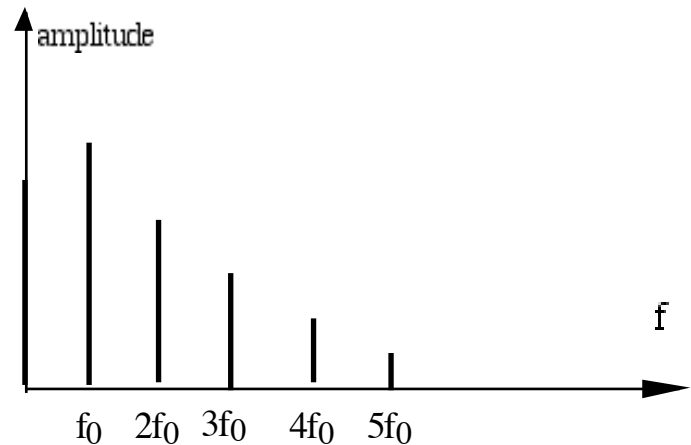
🍏 Le « poids » relatif de chacune des composantes non continues du signal $s(t)$ est représenté par son *amplitude* :

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Cette amplitude décroît quand n augmente : les harmoniques « contribuent » d'autant moins au signal que leur rang est élevé.

On a : $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0}$

La représentation de Fourier du signal $s(t)$ est alors appelée **spectre de Fourier**.
Un tel spectre est de la forme :



🍏 Certains harmoniques peuvent être absents suivant la forme du signal (nous allons le vérifier sur un exemple). En outre, **si la fonction $s(t)$ est paire les b_n sont nuls et si elle est impaire, les a_n sont nuls...**

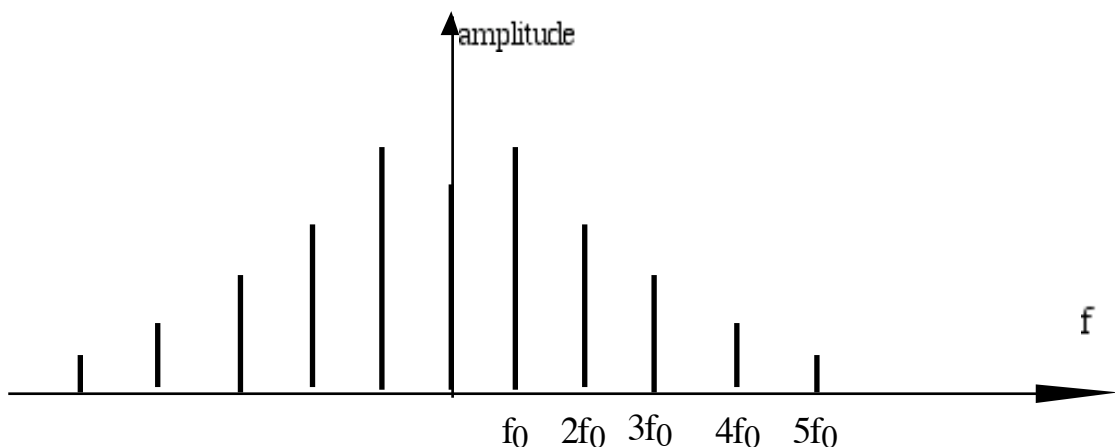
🍏 On peut adopter aussi une notation complexe qui a le mérite de « condenser » l'écriture :

$$\boxed{\underline{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}}$$

avec $s(t) = \text{Re}[\underline{s}(t)]$, les coefficients c_n sont alors complexes avec la correspondance :

$$c_n = \frac{a_n - j b_n}{2} = c_{-n}^*$$

Dans cette représentation apparaissent alors des fréquences « négatives », le spectre réel étant en quelque sorte dédoublé par symétrie du côté de ces fréquences négatives. Ainsi le spectre précédemment représenté aurait l'allure :

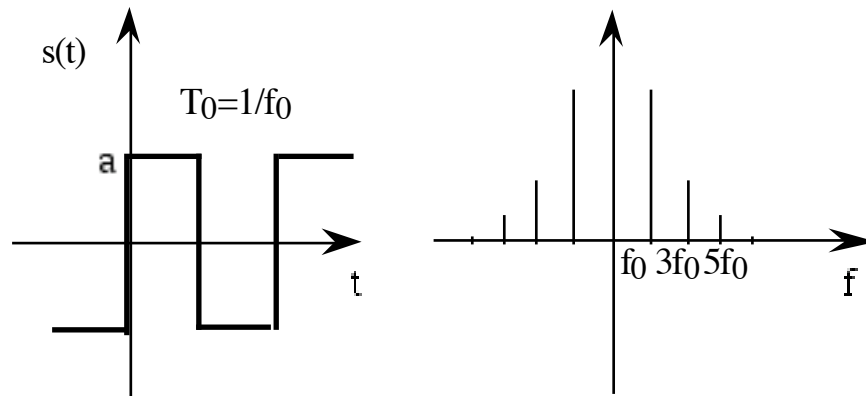


2.2 Un exemple de DSF

Ainsi pour la fonction créneau représentée ci-dessous entre 0 et T , le développement s'écrit :

$$s(t) = \frac{4a}{\pi} \left[\sin 2\pi f_0 t + \frac{1}{3} \sin 3(2\pi f_0 t) + \frac{1}{5} \sin 5(2\pi f_0 t) + \dots \right] = \frac{4a}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin(2p+1)2\pi f_0 t$$

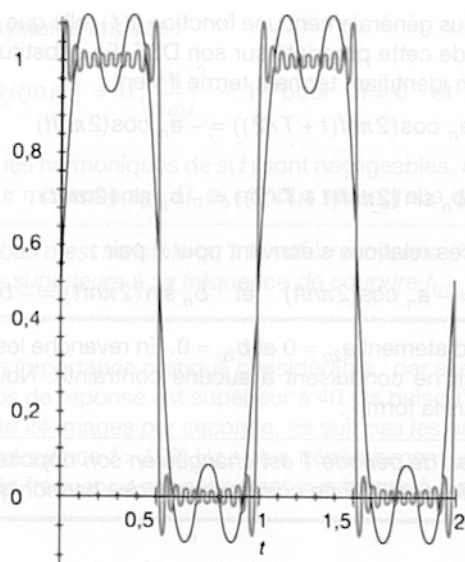
et on a le spectre :



Rq : A partir du DSF précédent, on peut déduire ceux de toutes les « fonctions créneaux » dérivées de la précédente : elles seront alors simplement affectées d'un déphasage et également éventuellement de l'ajout d'une composante continue. Le spectre, lui, ne sera pas modifié (à part le cas de l'ajout de la composante continue).

2.3 Reconstitution d'un signal à partir de son DSF

Réciproquement, on peut recomposer un signal à partir des termes de la série de Fourier correspondante. En toute rigueur, il faut bien sûr un nombre infini de termes pour reconstituer parfaitement le signal. Cependant, selon la précision désirée, on pourra se contenter du fondamental et d'un certain nombre d'harmoniques. Ainsi on pourra en quelque sorte synthétiser une fonction périodique donnée à partir de sa série de Fourier.



A titre d'exemple, la figure ci-dessous montre la synthèse de la fonction créneau étudiée plus haut, à partir de $N = 3$ ou 21 termes : la synthèse s'améliore évidemment avec le nombre de termes pris en compte.

On remarque sur cet exemple que le signal est moins bien synthétisé au niveau des « coins » du créneau, là où il varie très rapidement, ce qui nécessite pour le décrire des harmoniques de fréquence élevée...

A part cette possibilité de synthèse d'un signal donné, quel est l'intérêt de l'analyse de Fourier ? En électronique par exemple, la grandeur d'entrée d'un montage n'est pas nécessairement sinusoïdale, alors que la fonction de transfert, elle, n'est linéaire que pour un mode sinusoïdal de pulsation ω . On peut alors utiliser la décomposition de Fourier en entrée, appliquer le transfert à chaque composante puis, par superposition, recomposer la grandeur de sortie. On assistera en général à une déformation du signal d'entrée puisque le module du transfert peut à priori varier suivant la fréquence.

C'est ainsi qu'on utilise ce principe dans un ampli sélectif qui est en fait un filtre à bande étroite : celui-ci "sélectionne" en quelque sorte, en l'amplifiant, une fréquence donnée, c'est-à-dire un harmonique donné, ce qui permet justement d'analyser cet harmonique. L'ampli doit bien sûr être ajustable, c'est-à-dire réglable en fréquence pour que sa fréquence de résonance puisse coïncider avec les fréquences des différents harmoniques du signal à étudier.

3. DEVELOPPEMENT D'UNE FONCTION NON PERIODIQUE EN INTEGRALE DE FOURIER

3.1 Transformée de Fourier

Moyennant également certaines précautions de convergence, une fonction $s(t)$ **non périodique** peut s'exprimer à l'aide de l'intégrale de Fourier. En notation complexe, on obtient :

$$s(t) = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{ou} \quad s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Cette intégrale apparaît comme une généralisation aux fonctions non périodiques du développement en série de Fourier, la somme devenant continue : **la fonction $s(t)$ est la somme continue d'une infinité de composantes sinusoïdales d'amplitude variable.**

La fonction $S(f)$ est donnée par :

$$S(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{ou} \quad S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

On note la symétrie complète des expressions de $s(t)$ et $S(\omega)$. S est appelée **transformée de Fourier** de s et s **transformée inverse** de S .

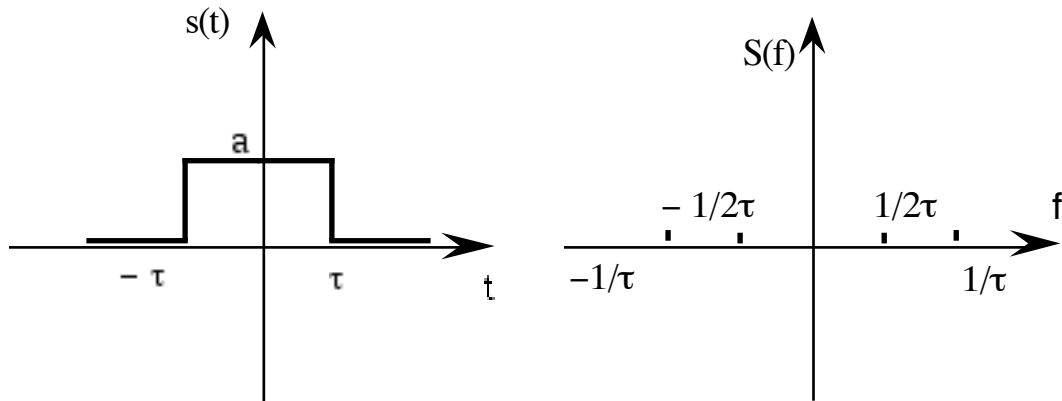
On peut également établir le spectre de Fourier de $s(t)$ en remarquant que la composante sinusoïdale dont la pulsation est comprise entre f et $f + df$ a une amplitude de module proportionnel à $S(f)$: **à une constante multiplicative près, le module de la transformée de Fourier d'une fonction $s(t)$ en fonction de la fréquence représente donc la répartition des amplitudes des composantes sinusoïdales de cette fonction $s(t)$.** Là encore on voit que la transformée de Fourier apparaît comme une généralisation du développement en série de Fourier, la somme discrète sur des fréquences multiples d'une fréquence fondamentale étant remplacée par une somme continue sur tout l'intervalle des fréquences possibles de zéro à l'infini...

3.2 Exemples

Prenons deux exemples :

- **Fonction créneau** : $s(t) = a$ pour $-\tau < t < +\tau$ et $s(t) = 0$ ailleurs.

Après calculs, on trouve $S(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \tau \frac{\sin(2\pi f \tau)}{2\pi f \tau}$.



Le spectre de Fourier montre alors que les amplitudes des composantes sinusoidales non négligeables sont comprises dans l'intervalle de fréquences $[0, \frac{1}{\tau}]$, soit :

$$\tau \Delta f = 1$$

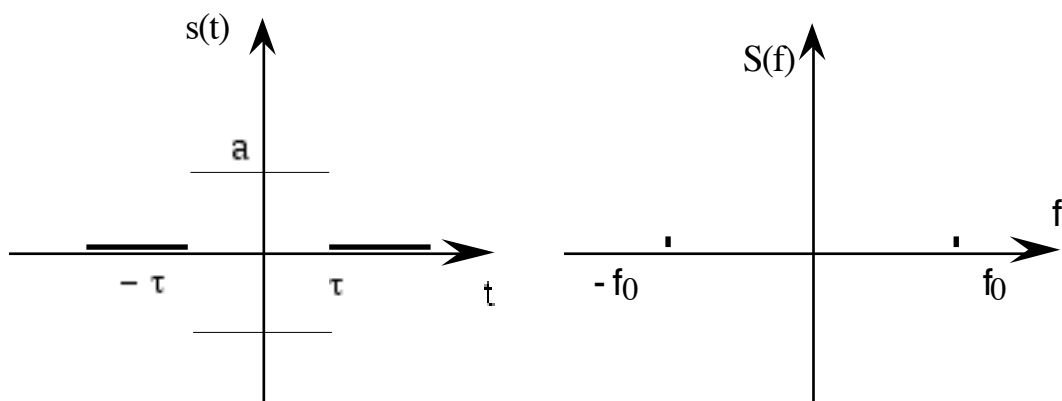
On dira que $\Delta \nu$ représente la gamme de fréquences significatives du spectre de Fourier du créneau, d'autant plus grande que τ est faible.

- **Fonction "train de sinusoides"**

Si $s(t) = a \cos(2\pi f_0 t)$ pour $-\tau < t < +\tau$ et 0 ailleurs, on trouve :

$$S(f) = a \tau \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\sin(2\pi(f - f_0)\tau)}{2\pi(f - f_0)\tau} + \frac{\sin(2\pi(f + f_0)\tau)}{2\pi(f + f_0)\tau} \right]$$

Soient les graphes :



On retrouve là encore, dans la partie $f > 0$, un intervalle de fréquences correspondant à des amplitudes $S(f)$ non négligeables, centré sur la fréquence f_0 des sinusoïdes du train d'ondes et toujours de l'ordre de $\frac{1}{\tau}$.

Plus le train d'ondes a une faible longueur et diffère donc d'une sinusoïde "infinie" et plus la gamme de fréquences significatives de Fourier sera étendue et on aura ici :

$$\tau \Delta f = 1$$

Ces trains de sinusoïdes sont très importants en physique tant il est vrai qu'un signal sinusoïdal même parfait de fréquence f_0 aura toujours une durée limitée. Il pourra cependant être traité comme une somme de signaux sinusoïdaux infinis de fréquences très proches de f_0 , mais **avec une certaine largeur en fréquence inversement proportionnelle à la durée réelle du train de sinusoïdes.**

4. ANALYSE DE FOURIER D'UN SIGNAL NUMERIQUE

4.1 Acquisition numérique d'un signal

Des signaux temporels tels que des tensions peuvent être acquis par des appareils numériques tels qu'un oscilloscope ou une carte associée à un logiciel informatique tel que Synchronie.

Dans les deux cas, le signal est numérisé par **échantillonnage** : on réalise un échantillonnage d'un signal $s(t)$ en prélevant ses valeurs à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$, dite **fréquence d'échantillonnage**. On fait ainsi correspondre au signal $s(t)$ une suite de valeurs $\{...s(0), s(T_e), ..., s(nT_e)\}$. Ce sont ces valeurs qui seront traitées numériquement.

T_e est le temps d'échantillonnage et $f_e = \frac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage associée.

Une autre paramètre important de l'acquisition est la **durée totale d'acquisition T_a qui va fixer la grandeur de la fenêtre temporelle dans laquelle le signal va être représenté.**

Dans cette fenêtre vont s'afficher **les points de mesure** (séparés ou éventuellement reliés entre eux par des segments comme dans Synchronie) dont le nombre N est un troisième paramètre d'acquisition évidemment relié aux précédents par ;

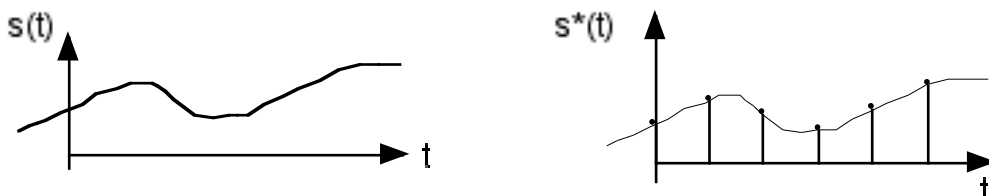
$$T_a = N T_e \Leftrightarrow f_e = N f_a$$

Dans le logiciel Synchronie par exemple, ces trois paramètres sont affichés dans la fenêtre « acquisition ». N peut être choisi manuellement comme un nombre compris entre 1 et 10 000. La « durée d'un échantillon » est limitée par les performances de la carte d'acquisition : elle peut être choisie entre $T_e = 500$ ns et $T_e = 10$ mn.

En pratique on choisit N (avec la possibilité de « moyenner » les mesures sur une série de plusieurs points pour éliminer des petites fluctuations aléatoires du signal), puis T_e : le troisième paramètre T_a est alors automatiquement fixé. On peut aussi choisir N et T_a et c'est T_e qui s'ajuste (dans la limite des possibilités décrites plus haut). Il est malheureusement impossible de fixer a priori T_e et T_a car N (entier) ne peut être ajusté que manuellement.

4.2 Représentation du signal numérisé

Le signal $s(t)$ continu est donc remplacé par le signal acquis discontinu $s^*(t)$. Il apparaît alors évident que $s^*(t)$ représente d'autant plus précisément $s(t)$ que les points sont « serrés » c'est-à-dire que f_e est élevée.



En particulier, pour un signal périodique de fréquence f_0 , il convient de choisir $f_e \gg f_0$. Si tel n'est pas le cas, et pour des valeurs particulières des deux fréquences, le signal $s^*(t)$ peut énormément différer du signal $s(t)$.

Exemples :

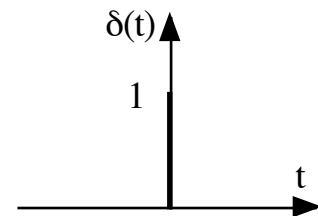
- Signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = 1\text{kHz}$
 - Échantillonné à 10 kHz et représenté sur 5 périodes. *Comment choisir N ?*
 - *Combien de périodes pourra-t-on représenter avec le nombre N maximal et la plus grande fréquence d'échantillonnage ?*
- *Reprendre le problème avec un signal sinusoïdal ou un signal carré de fréquence 10kHz.*

4.3 Analyse de Fourier d'un signal numérisé

4.3.1 DSF théorique d'un signal périodique numérisé

Définissons tout d'abord la fonction de Dirac $\delta(t)$ telle que :

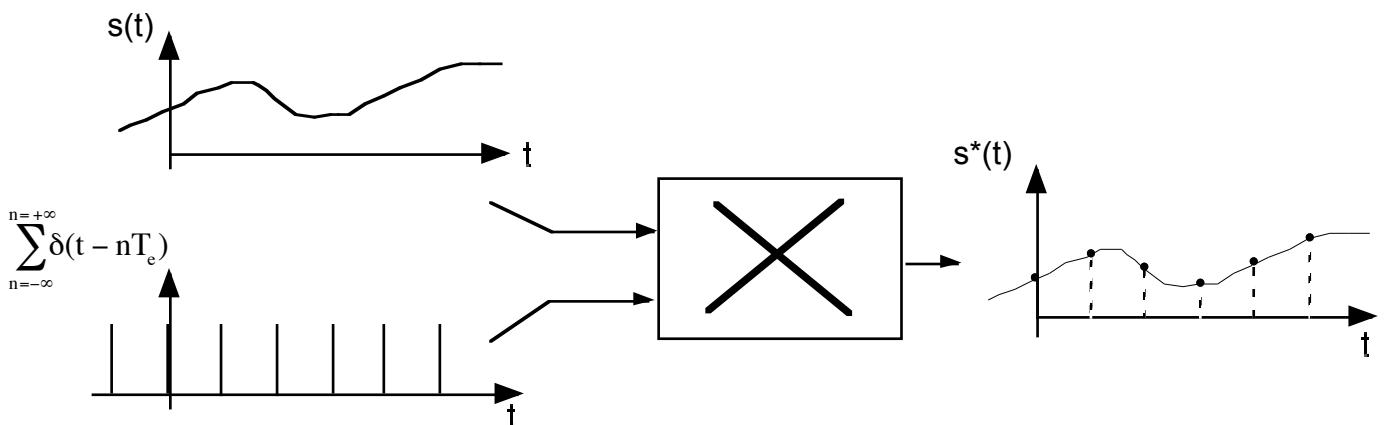
Pour $t \neq 0$ $\delta(t) = 0$ et $\delta(0) = 1$



Le signal échantillonné $s^*(t)$ peut alors être mathématiquement déduit du signal $s(t)$ par :

$$s^*(t) = s(t) \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_e),$$

$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_e)$ est appelée **peigne de Dirac**. Le principe de l'échantillonnage est résumé sur la figure ci-dessous.



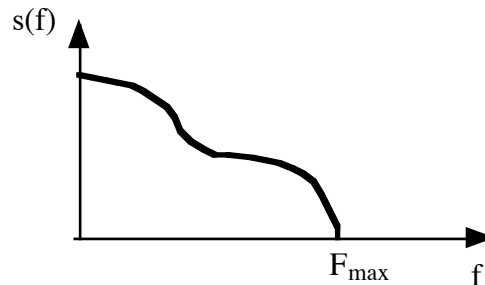
Le peigne de Dirac est lui-même un signal périodique $g(t)$ de fréquence f_e et de valeur moyenne non nulle : son DSF va comporter une composante continue et les fréquences $f_e, 2f_e, 3f_e, \dots$

Enfin, rappelons que quand on multiplie un signal de fréquence f_e par un signal de fréquence f ($f < f_e$) on obtient un spectre contenant les fréquences $f_e - f$ et $f_e + f$.

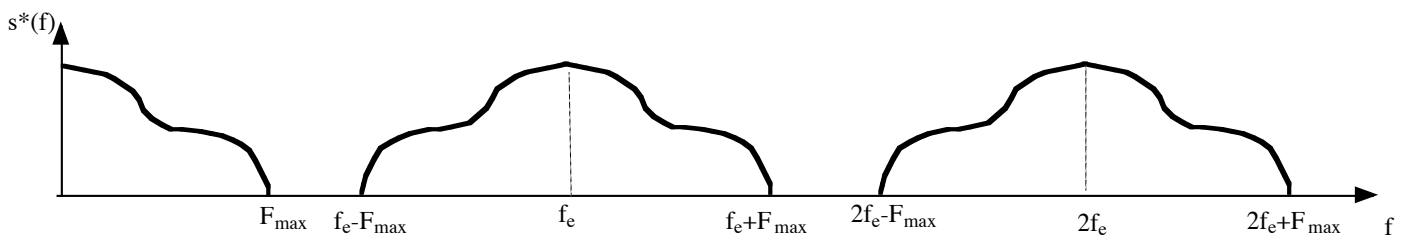
Ainsi, si $s(t)$ est sinusoïdale de fréquence f_0 , $s^*(t)$ contiendra donc dans son spectre la fréquence f_0 mais aussi toutes les fréquences du type : $nf_e - f$ et $nf_e + f$

4.3.2 Généralisation : spectre d'un signal numérisé quelconque : théorème de Shannon

Supposons un signal $s(t)$ quelconque dont le spectre (continu) en fréquence est représenté ci-dessous :



Le raisonnement fait au paragraphe précédent s'applique à chaque composante spectrale contenue dans le spectre de $s(t)$. Le spectre du signal échantillonné $s^*(t)$ correspondant à $s(t)$ est donc le suivant :



Pour obtenir le spectre « recherché », le système d'acquisition et d'analyse doit donc « éliminer » les spectres surnuméraires, ce qu'on peut obtenir en tronquant l'échelle des fréquences par exemple.

Encore faut-il que ces spectres ne « débordent » pas sur le spectre réel. Quand c'est le cas, on dit qu'il y a *repliement du spectre initial*. La figure ci-dessus montre clairement qu'une condition de non repliement impose à la fréquence d'échantillonnage d'être telle que $f_0 - F_{max} > F_{max}$, soit $f_0 > 2 F_{max}$. On obtient ainsi **le théorème de Shannon** :

Pour éviter un repliement de spectre, le signal analysé doit être échantillonné à une fréquence au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale du spectre du signal.

4.3.3 Influence du temps d'acquisition T_a

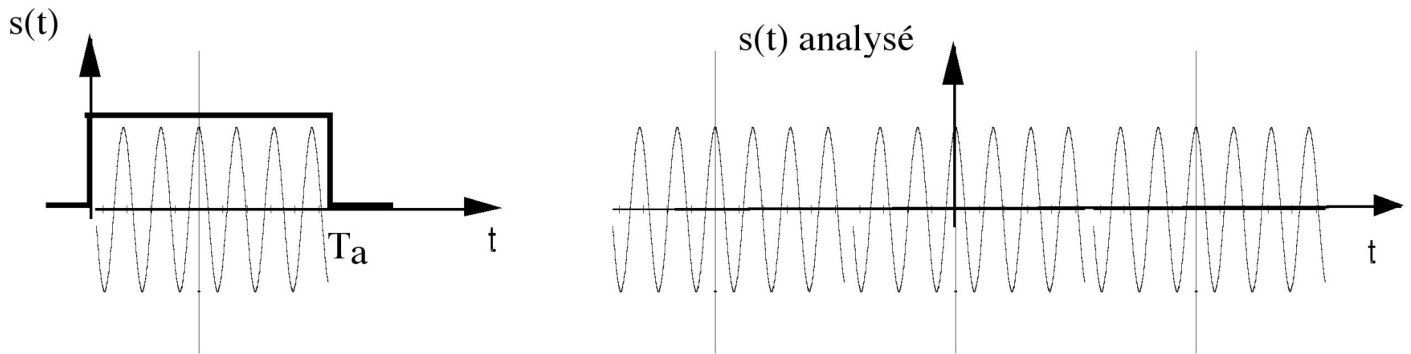
Le spectre de Fourier d'un signal « réel » $s(t)$ est également différent du spectre d'une fenêtre temporelle de ce signal. Ainsi, le temps d'acquisition influe sur le spectre du signal acquis.

On a vu par exemple qu'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 , mais de durée limitée τ , voit son spectre théoriquement composé de la seule fréquence f_0 , élargi autour de cette fréquence avec un intervalle Δf inversement proportionnel à τ .

Ainsi un signal de fréquence 1kHz, acquis sur 3 périodes doit voir son spectre élargi de 300 Hz environ...

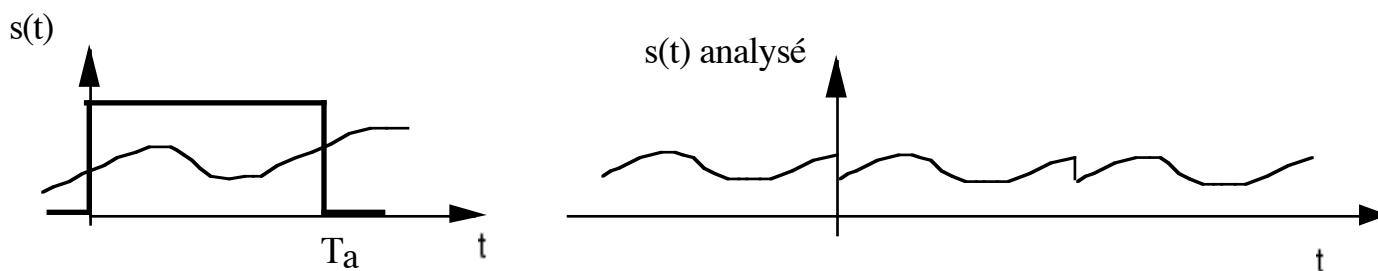
Il apparaît donc qu'on a intérêt à choisir un temps d'acquisition le plus long possible pour affiner le spectre.

Cependant, pour remédier à cet inconvénient, un logiciel tel que Synchronie rend artificiellement le signal « infini » dans le temps en le périodisant, c'est à dire en dupliquant régulièrement dans le temps la fenêtre d'acquisition pour le calcul du spectre de Fourier :



Le signal sinusoïdal représenté ci-dessus et acquis pendant la durée T_a est donc « reconstitué » dans sa globalité par ce procédé. Mais celui-ci peut faire apparaître, comme le montre la figure, des discontinuités associées au raccordement des fenêtres. Ces discontinuités, de période T_a , réintroduisent donc de façon parasite la fréquence f_a qui intervient à nouveau dans le spectre ! On peut à nouveau s'en débarrasser en demandant au logiciel de dupliquer non pas la fenêtre dans son intégralité, mais un nombre entier de périodes du signal...

Ce procédé ne peut en revanche être mis à profit dans le cas d'un signal où n'apparaît aucune périodicité évidente :



Le temps d'acquisition intervient enfin de façon très importante dans l'affichage du spectre de Fourier lui-même : celui-ci, tout comme le signal est échantillonné. **La fréquence d'échantillonnage, qui apparaît alors comme la résolution du spectre (notée incrément sur Synchronie) n'est autre que la fréquence f_a associée à la durée d'acquisition.** Cet argument renforce l'idée d'un choix le plus grand possible de cette durée d'acquisition.

En résumé :

- Pour la simple représentation temporelle d'un signal $s(t)$, la durée d'acquisition peut être choisie comme la durée du signal qu'on désire observer. Compte tenu du nombre de points disponibles, on prendra la fréquence d'échantillonnage la plus élevée possible, pour mieux représenter le signal et respecter le critère de Shannon.

- Pour une analyse de Fourier du signal, on devra en plus privilégier une durée d'acquisition longue et optimiser la fenêtre d'analyse tout en gardant une grande fréquence d'échantillonnage...