

# ANNEXE M1

## CHAMPS NEWTONIENS

### 1. MOUVEMENTS A FORCE CENTRALE

#### 1.1. Principales caractéristiques

- Loi de force de la forme  $\vec{F} = f(r) \vec{e}_r$
- Existence d'une énergie potentielle associée :  $dE_p = - \vec{F} \cdot d\vec{r} = - F dr$
- Conservation de l'énergie  $E_m = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r)$
- Conservation du moment cinétique  $C = r^2\dot{\theta}$
- Mouvement plan, loi des aires  $dS = \frac{1}{2}Cdt$

#### 1.2. Formules de Binet

En effectuant le changement de variables  $u = \frac{1}{r}$ , et en utilisant la constante des aires, on montre que la vitesse et l'accélération en coordonnées polaires se mettent sous la forme :

$$\vec{v} = C \left( - \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + u \vec{e}_\theta \right)$$

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r = - C^2 u^2 \left( u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \vec{e}_r$$

#### 1.3. Energie potentielle efficace

La combinaison des intégrales premières de l'énergie et du moment cinétique permet d'introduire la notion d'énergie potentielle efficace :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{peff}(r)$$

On peut alors discuter graphiquement de la trajectoire dans le champ de forces centrales en traçant la courbe  $E_{peff}(r)$  et en remarquant qu'on doit avoir  $E \geq E_{peff}(r)$ . On obtient alors un domaine des valeurs possibles de  $r$ . Nous allons maintenant examiner le cas particulier d'un champ newtonien.

## 2. TRAJECTOIRES DANS UN CHAMP NEWTONIEN

### 2.1. Nature des trajectoires

En appliquant la RFD au cas d'une force de la forme  $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r = -ku^2 \vec{e}_r$  et en revenant à la variable  $r$ , on montre que la trajectoire  $r(\theta)$  est de la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \phi)} \quad \text{avec } p = \frac{mC^2}{k}$$

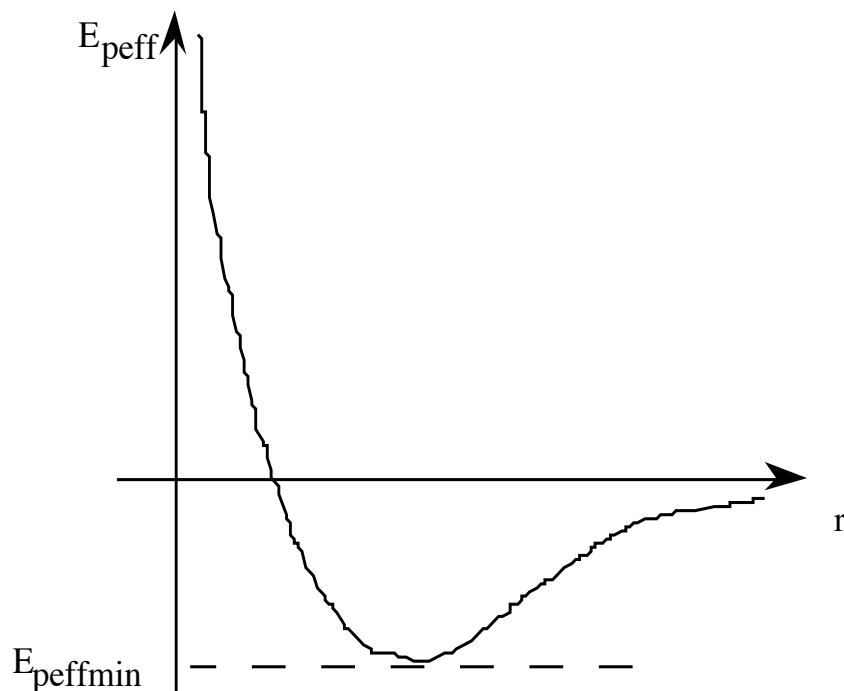
**Les trajectoires sont donc des coniques, dont le point O est un foyer.**

### 2.2. Trajectoires et énergie

L'énergie potentielle associée au champ de forces newtonien est :  $E_p = -\frac{k}{r}$

La forme de la fonction  $E_{\text{peff}}(r)$  représentée ci-après montre alors les résultats suivants :

- $E \geq 0$  la trajectoire aura une branche infinie : parabole ou hyperbole
- $E < 0$  la trajectoire est une ellipse
- $E = E_{\text{peff min}}$  la trajectoire est un cercle



### 2.3. Cas de la trajectoire circulaire

Si la trajectoire est circulaire, le mouvement est uniforme ( $r = r_0 = \text{cste} \Rightarrow \theta = \text{cste}$ ). On retrouve alors très facilement la vitesse associée, en écrivant :

$$m \frac{v^2}{r_0} = \frac{k}{r_0^2} \quad \text{D'où :} \quad v = \sqrt{\frac{k}{mr_0}}$$

$$\text{On a également } E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{r_0} = -\frac{1}{2}E_p, \text{ ou encore :} \quad E = -\frac{k}{2r_0}$$

On démontre que cette relation est également vraie pour la trajectoire elliptique : il suffit alors de remplacer le rayon  $r$  de l'orbite circulaire par le demi grand axe  $a$  de l'ellipse.

### 2.4. Cas de la trajectoire parabolique : vitesse de libération

La trajectoire parabolique est associée à une énergie totale nulle; il vient alors très simplement la relation :

$$v = \sqrt{\frac{2k}{mr}}$$

Cette vitesse est la vitesse minimale qu'on devrait communiquer au point matériel initialement situé à la distance  $r$  du centre  $O$ , pour que ce point puisse s'éloigner à l'infini : on l'appelle vitesse de libération.

### 2.5. Cas des trajectoires elliptiques : relations entre paramètres 3ème loi de Képler

Nous avons vu précédemment que l'énergie totale se met sous la forme :

$$E = -\frac{k}{2a}$$

où  $a$  est le demi-grand axe de l'ellipse. Les caractéristiques intéressantes d'une trajectoire elliptique sont le périastre  $r_p$ , plus petite distance d'approche, et l'apoastre  $r_a$ , plus grande distance d'approche. En ces points, la vitesse est orthogonale au rayon vecteur, et on peut écrire :

$$r_a V_a = r_p V_p = C$$

La conservation de l'énergie fournit deux autres égalités permettant de calculer ces distances :

$$E = -\frac{k}{2a} = \frac{1}{2} mV_a^2 - \frac{k}{r_a} = \frac{1}{2} mV_p^2 - \frac{k}{r_p}$$

Si l'on s'intéresse aux grandeurs  $p$  et  $e$ , on peut rappeler que :

$$r_a = \frac{p}{1-e} r_p = \frac{p}{1+e} \quad r_a + r_p = 2a$$

Enfin, la loi des aires indique qu'entre la période de rotation  $T$  et la surface de l'ellipse  $S = \pi ab$ , on a la relation :

$$S = \pi ab = \frac{1}{2}CT$$

En utilisant les relations  $p = \frac{b^2}{a}$  et  $p = \frac{mC^2}{k}$ , il vient :  $\mathbf{T^2 = \frac{2\pi^2 mC}{k} a^3}$

On retrouve la 3<sup>ème</sup> loi de Képler indiquant la proportionnalité entre le carré de la période et le cube du demi grand axe...