CHAPITRE 4
PHENOMENES DE DIFFUSION

1. QU'EST CE QUE LA DIFFUSION ?

1.1. La diffusion est un phénomène de transport

Quand on débouche un flacon de parfum dans une pièce, on dit que l'odeur se répand dans la pièce. Que se passe-t-il en réalité ? Le phénomène est essentiellement de nature microscopique :

Les molécules gazeuses « responsables de l'odeur », c'est à dire perçues par nos récepteurs chimiques olfactifs, sont « émises » au niveau de l'embouchure du flacon et, au hasard des chocs intermoléculaires avec celles de l'air, sont transportées de proche en proche dans toute la pièce.

Au niveau macroscopique, le phénomène de diffusion comporte donc nécessairement la notion d'un transport d'une grandeur extensive, ici les molécules « odorantes » au sein d'un milieu diffusant, ici l'air de la pièce.

De même assiste-t-on à des transferts thermiques des endroits « chauds » vers des endroits »froids ». La encore , il s'agit d'un phénomène microscopique avec transport d'énergie d'agitation thermique au hasard de chocs.

En résumé, dans un phénomène de diffusion, on assiste, au sein d'un milieu diffusant, au transport d'une grandeur extensive : particules N pour la diffusion du même nom, transferts thermiques Q pour la diffusion thermique.

Remarque : Il faut distinguer la diffusion d'un autre phénomène de transport : **la convection**. Dans le cas de la convection, c'est le milieu lui-même qui se déplace dans un mouvement d'ensemble, transportant par là même une grandeur macroscopique associée.
Ainsi un fluide caloporteur en écoulement peut transporter de l'énergie thermique. Le phénomène de transport d'un parfum par diffusion peut être amplifié par convection si on provoque un courant d'air près de l'embouchure grâce à un ventilateur par exemple…

1.2. La diffusion est liée à l'inhomogénéité d'une grandeur intensive

Quelle est la cause du phénomène diffusif en lui-même ? Il est clair que la diffusion thermique des endroits « chauds » vers les endroits « froids » suppose implicitement que la température n'y soit pas la même. Le déséquilibre thermique, c'est à dire l'inhomogénéité de la température est à l'origine du phénomène de diffusion. Celui-ci tend d'ailleurs à supprimer cette inhomogénéité : le transfert thermique va du « chaud » au « froid » tendant alors à égaliser les températures.

De même la diffusion d'un parfum provient de l'inhomogénéité initiale de la densité des particules odorantes, très élevée près de l'embouchure du flacon, et très faible loin de ce dernier. La diffusion de particules tend alors à rendre homogène dans la pièce la densité particulaire.

En résumé, l'inhomogénéité initiale d'une grandeur intensive, température en diffusion thermique, densité particulaire en diffusion de particules est à l'origine du phénomène de diffusion qui tend à supprimer cette inhomogénéité.

Remarque : Le phénomène de diffusion est donc essentiellement **irréversible** : il part d'une situation de déséquilibre pour tendre vers une situation d'équilibre.

2. COURANTS DE DIFFUSION

2.1. Puissance diffusée à travers une surface

Au transport de la grandeur extensive, il est utile d'associer une puissance diffusée : c'est par définition la grandeur traversant par diffusion une surface donnée S par unité de temps.

Ainsi la puissance thermique (en W) sera définie en disant que si un transfert élémentaire δQ traverse S pendant le temps élémentaire δt, la puissance thermique correspondante est

$$P_{th} = \frac{\delta Q}{\delta t}$$

De même, la puissance particulaire (en particules.m^{-3}) sera définie comme :

$P_{part} = \dfrac{\delta N}{\delta t}$ où δN est le nombre élémentaire de particules traversant S pendant δt.

Comme en électricité, où l'intensité I à travers la section S d'un fil électrique s'écrit :

$$I = \frac{\delta q}{\delta t} = \iint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS}$$

où $\vec{j}$ est le vecteur courant, il est commode d'introduire un vecteur courant de diffusion dont le flux à travers S représente la puissance diffusée : la direction et le sens du courant indiquent la direction et le sens du transport de la grandeur extensive et son module représente la grandeur transportée par unité de surface et de temps dans cette direction et ce sens …

Quand on fait intervenir ces courants, les puissances doivent s'écrire :

$$\boxed{P_{th} = \frac{\delta Q}{\delta t} = \iint_S \vec{j}_Q.\overrightarrow{dS}} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{part} = \frac{\delta N}{\delta t} = \iint_S \vec{j}_n.\overrightarrow{dS}}$$

2.2. De l'intérêt du gradient

Il faut à présent relier le courant de diffusion à l'inhomogénéité de la grandeur intensive à l'origine de phénomène. Effectuons tout d'abord quelques rappels sur l'opérateur gradient.

Cet opérateur agit sur un champ scalaire g(M,t) dépendant de l'espace et du temps. Un tel champ correspond en physique à la donnée d'une grandeur scalaire en tout point (d'un domaine éventuellement limité) et à tout instant .

On parlera pas exemple du champ de pression dans l'atmosphère, du champ de température près du cratère d'un volcan…

Par définition, est un vecteur tel que la variation élémentaire dg de g associée à un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$ à partir d'un point M, à la date t, s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{dg = \overrightarrow{grad}\, g.\overrightarrow{dr}}}$$

Ainsi, dans un systèmes cartésien où on a g(x, y, z, t), quand on se déplace, à la date t, de M(x, y, z) à M'(x + dx, y + dy, z + dz), g varie de dg telle que :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz$$ d'où il découle :

$$\boxed{\mathbf{\overrightarrow{grad}\, g = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{e}_z}}$$

Concrètement, le gradient d'une grandeur est un vecteur qui indique dans quelle direction, dans quel sens et avec quelle intensité cette grandeur varie dans l'espace : **les points de l'espace correspondant, à un même instant, à une même valeur du champ forment une surface et le vecteur gradient est orthogonal à cette surface et dirigé dans le sens croissant de la grandeur …**

Ainsi dans un fluide au repos, il existe un gradient de pression vertical dirigé vers le bas…

2.3. Lois de Fick et Fourier

Comme on pouvait le pressentir, il existe une relation liant le courant thermique à l'inhomogénéité de température. Cette relation fait justement intervenir le gradient et s'écrit :

$$\boxed{\vec{j}_Q = -\lambda\, \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \mathbf{T} \text{ loi de Fourier}}$$

La loi de Fourier est en accord avec les caractéristiques des courants thermiques : le transfert est d'autant plus important que la température varie fortement (d'où la dépendance vis à vis du gradient) et s'effectue dans le direction et le sens des températures décroissantes (noter le signe moins de la loi de Fourier). Cette loi fait enfin apparaître une constante caractéristique du milieu où s'effectue la diffusion thermique, constante appelée **conductivité thermique**.

On peut donner quelques ordres de grandeurs de la conductivité thermique selon les milieux. On retiendra l'unité de λ : $W.K^{-1}.m^{-1}$.

Cuivre 390 ; Acier inox 16 ; Verre 1,2 ; Laine de verre 40.10^{-3} ...

Ainsi, il existe des plus ou moins bons conducteurs thermiques : le cuivre est un bon conducteur thermique (utilisé en cuisine pour des récipients de cuisson…) alors que la laine de verre sera plutôt qualifiée d'isolant thermique (utilisée pour isoler thermiquement des locaux…)

De façon tout à fait analogue, la **loi de Fick** régit la diffusion des particules :

$$\boxed{\vec{j}_n = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,n \quad \textbf{loi de Fick}}$$

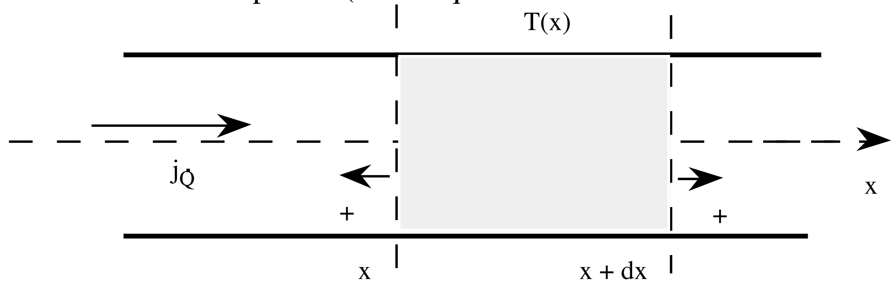
où la diffusivité D est une constante caractéristique du milieu, qui s'exprime en $m^2.s^{-1}$.

3. DIFFUSION UNIDIMENSIONNELLE

3.1. Cas du régime permanent

3.1.1 Position du problème

Considérons un milieu de section s constante, d'axe x : toutes les grandeurs du problème ne dépendront que de la variable d'espace x (on dit que le problème est **unidimensionnel**) :



Ainsi, la température s'écrit T(x). Cette inhomogénéité entraîne l'existence d'un courant thermique

$$\vec{j}_Q(x) = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}T(x) = -\lambda\frac{dT}{dx}\vec{e}_x$$

Concrètement, il peut s'agir d'un conducteur thermique latéralement calorifugé (c'est à dire entouré d'un isolant thermique : cylindre de cuivre gainé de laine de verre par exemple).

On peut effectuer un bilan thermique sur la « tranche » élémentaire de milieu comprise entre les abscisses x et x + dx, pendant le temps δt :

- la section d'abscisse x est traversée par la puissance - $P_{th}(x)$ = - $j_Q(x)$ s, le signe - provenant du changement de convention de signe quand on passe d'une surface ouverte à une surface fermée. Pendant δt, le transfert thermique associé est donc $\delta Q(x)$ = - $j_Q(x)$ s δt

- la section d'abcisse x + dx est traversée par $P_{th}(x + dx) = j_Q(x + dx)\, s$, d'où un transfert thermique $\delta Q(x + dx) = j_Q(x + dx)\, s\, \delta t$

Le régime étant permanent, la température ne peut varier dans le temps, ce qui suppose que l'énergie interne du volume élémentaire sdx est elle-même constante, ce qui implique enfin que la somme algébrique des transferts thermiques à travers les parois de ce volume est nulle, soit :

$$\delta Q(x) + \delta Q(x + dx) = 0 \quad \Rightarrow \quad j_Q(x) = j_Q(x + dx)$$

2.1.2 Conservation de la puissance thermique

La relation précédente entraîne bien évidemment $P_{th}(x) = P_{th}(x + dx)$

Ainsi, en régime permanent, les seuls échanges thermiques étant dus aux transferts diffusifs, la puissance thermique est la même à toute abscisse x.

On peut dire de façon corollaire que la puissance algébrique traversant toute surface fermée contenant un volume compris entre deux abscisses quelconques x_1 et x_2 par exemple est identiquement nulle : on dit qu'il y a conservation de la puissance thermique

2.1.3 Répartition linéaire

Revenons à présent à la relation $j_Q(x) = j_Q(x + dx)$, qui entraîne immédiatement :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \text{ ou encore } \frac{dT}{dx} = \text{cste soit enfin } T(x) = ax + b$$

les constantes a et b d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites. Imaginons par exemple une barre de cuivre de longueur L dont les extrémités sont maintenues à T_1 et T_2 (glace fondante et eau bouillante par exemple). On obtient :

$$T(x) = T_1 + x\frac{T_2 - T_1}{L}$$

Le gradient de température dans la barre est alors uniforme et vaut $\frac{T_2 - T_1}{L}$ en module. La puissance thermique conservée à toute abscisse est $P = -\lambda s \frac{T_2 - T_1}{L}$

En régime permanent unidimensionnel, et en l'absence de tout autre échange thermique que les transferts diffusifs, la répartition de température est linéaire .

Ces résultats se transposent bien évidemment à la diffusion de particules en substituant la densité particulaire n(x) à la température T(x)…

3.2. Analogie électro-thermique

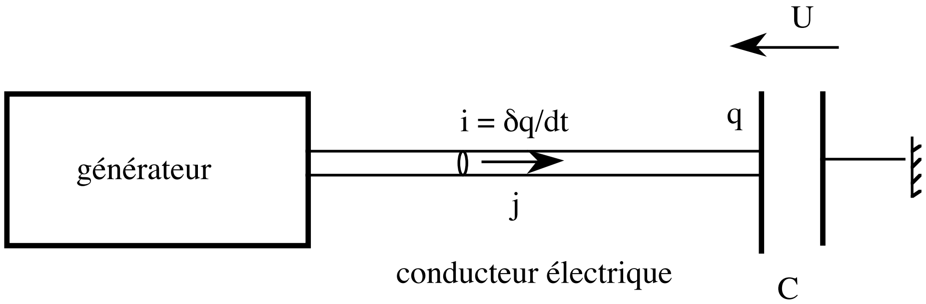
Dans les conditions d'application de la loi d'Ohm, **en régime permanent**, le vecteur courant $\vec{j}$ dans un conducteur est proportionnel au champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ qui y règne, selon la relation :

$$\vec{j} = -\gamma\,\overrightarrow{\text{grad}}V$$

Dans le cadre du régime permanent (cette restriction importante justifie que le phénomène de conduction électrique n'est pas considéré comme un phénomène de diffusion), cette loi permet de rapprocher la conduction électrique et la diffusion thermique : les grandeurs λ et γ sont analogues (d'où l'appellation identique de conductibilité …**mais attention aux dimensions évidemment différentes** …), de même que les grandeurs intensives T et V. Les similitudes ont déjà été évoquées au niveau des courants où on a rapproché :

$$I = \frac{\delta q}{\delta t} = \iint_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} \quad \text{et } P_{th} = \frac{\delta Q}{\delta t} = \iint_S \vec{j}_Q.\overrightarrow{dS}$$

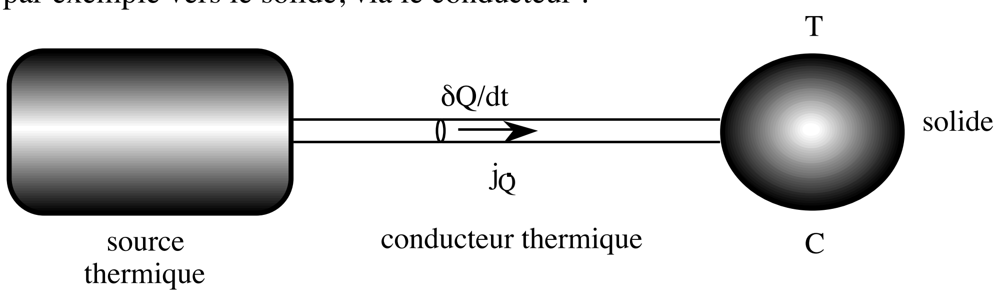
Considérons alors le système formé d'un condensateur de capacité C, aux bornes duquel on désire obtenir une tension U. Pour ce faire, on le charge en reliant une armature à un fil conducteur qui peut lui apporter des charges issues d'un générateur électrique, l'autre armature étant reliée au sol par exemple :



Si la charge du condensateur est quasi-statique, il est toujours en équilibre, la charge portée q étant proportionnelle à la tension u, selon la relation q = C u. Ainsi, une charge supplémentaire apportée δq augmente la tension aux bornes de du = δq / C. Cet apport de charges se fait par l'intermédiaire du fil conducteur à l'intérieur duquel circule le courant $\vec{j}$.

A ce système électrique, on peut associer un système thermique « équivalent » :

On désire porter un solide de capacité thermique C à une température T. Pour ce faire on doit augmenter son énergie interne en lui apportant de l'énergie, par exemple sous forme de transfert thermique Q, par l'intermédiaire d'un conducteur thermique. Chaque transfert élémentaire δQ pendant le temps δt augmentera la température de dT selon : $\delta Q = C\,dT$. Ce transfert pourra se faire d'une source thermique par exemple vers le solide, via le conducteur :



Nous pouvons poursuivre notre analogie en définissant la conductance thermique comme nous avions défini la conductance électrique. Pour un conducteur électrique dont les extrémités sont soumises à une différence de potentiel V_1 - V_2 et parcouru par un courant **permanen**t d'intensité i, la conductance G s'écrit :

$$G = \frac{i}{V_1 - V_2}$$

De même pour un conducteur thermique dont les extrémités sont soumises à une différence de température T_1 - T_2 et parcouru par un courant thermique de puissance P_{th}, on définit la conductance thermique par :

$$\boxed{\mathbf{G_{th} = \frac{P_{th}}{T_1 - T_2} \quad \text{en W.K}^{-1}}}$$

Pour un conducteur thermique filiforme de conductivité λ, de section s et de longueur L, la puissance thermique est $P = -\lambda s \frac{T_2 - T_1}{L}$. D'où la valeur de G :

$$\mathbf{G_{th} = \lambda \frac{s}{L}}$$

On retrouve l'expression de la conductance électrique d'un conducteur électrique de même géométrie en remplaçant λ par γ …

Rq. De même sont analogues les capacités électrique et thermique (d'où l'appellation et la notation identiques...)

3.3. Diffusion en régime variable

En régime variable de problème précédent se complique du fait de la double dépendance des grandeurs vis à vis de x et de t : ainsi, la température s'écrit T(x, t).

Le courant thermique est toujours colinéaire à l'axe x mais s'écrit à présent :

$$\vec{j}_Q(x,t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$$

Le bilan thermique précédent doit à présent inclure la variation d'énergie interne propre à la tranche sdx dont la température varie de dT entre les instants t et t + dt, selon :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

On a donc :

- transfert thermique traversant s à l'abscisse x : $\delta Q(x, t) = - j_Q(x, t)\, s\, dt$
- transfert thermique traversant s à l'abscisse x + dx : $\delta Q(x + dx) = j_Q(x + dx)\, s\, dt$
- variation d'énergie interne au volume sdx : $dU(x, t) = \rho s dx\, c dT = \rho s dx\, c \frac{\partial T}{\partial t} dt$

Le bilan global s'écrit :

$$\delta Q(x, t) + \delta Q(x + dx, t) + dU = 0$$

soit, après simplification par sdt : $- j_Q(x, t) + j_Q(x + dx) + \rho dx\, c \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$

mais $j_Q(x + dx) - j_Q(x, t) = \dfrac{\partial j_Q}{\partial x} dx = - \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$$\boxed{- \lambda \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^2} + \rho \mathbf{c} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}}$$

ou encore, en revenant au courant j_Q notant $u_v = \rho c T$ l'énergie interne volumique du conducteur :

$$\frac{\partial \mathbf{j}_Q}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}$$

Rq. On pourrait bâtir le même type d'équation en diffusion de particules sous les formes :

$$\boxed{- D \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_n}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}$$

3.4. Diffusion et propagation

Les équations unidimensionnelles précédentes portant sur T et n peuvent s'unifier en notant $D_Q = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ la « diffusivité » thermique du milieu et prennent alors la forme générale :

$$- D \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}$$

D'un point de vue purement dimensionnel, longueur et temps sont donc liés en diffusion par une relation du type : $L = \sqrt{Dt}$. Nous admettrons la véracité de cette dépendance confirmée par la solution (hors programme) de l'équation ci-dessus.

Les conséquences de cette expression sont très importantes : prenons l'exemple de la diffusion de particules. Un parfum émis à l'embouchure d'un flacon et diffusant dans l'air est détecté par nos cellules olfactives à partir d'un certain seuil de la densité particulaire associée. De même pour le gaz ammoniac qui diffuse dans l'air et sera détecté à partir d'une certaine densité par le virage d'un indicateur coloré imprégnant un papier .

Si le parfum (ou l'ammoniac) est détecté à des instants t_1 et t_2, à des distances L_1 et L_2 de la source d 'émission, ces grandeurs sont liées par la relation :

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 = \frac{T_2}{T_1}$$

Concrètement, quand on multiplie le temps par 2, on multiplie par 4 la distance de détection : l

Le phénomène de diffusion n'est pas caractérisé par une vitesse constante.

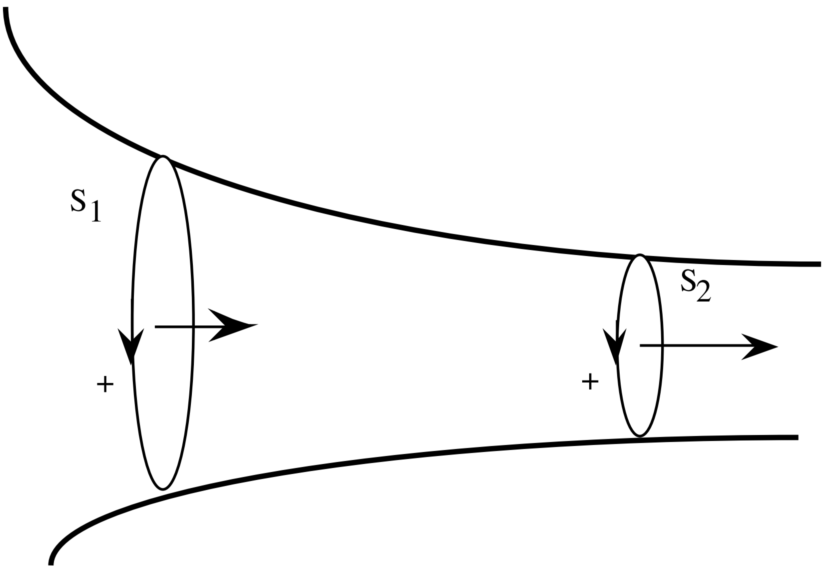
Nous verrons plus tard un autre phénomène, **la propagation**, qui, elle, dans certains milieux, est bel et bien caractérisée par une vitesse constante (souvent appelée célérité c), qui intervient directement dans l'équation spatio-temporelle de la grandeur propagée, équation qui se met sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}^2}\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{t}^2} = \mathbf{0}$$

Notons enfin une autre différence fondamentale entre diffusion et propagation : la diffusion est essentiellement irréversible (ce qu'atteste la dépendance vis à vis de t de l'équation de diffusion par l'intermédiaire d'une dérivée première) alors que la propagation obéissant à l'équation ci-dessus est réversible (présence d'une dérivée seconde vis à vis du temps …).

3.5. Diffusion en présence de sources

Comme nous l'avons vu au premier paragraphe, la définition de $\mathbf{j}_Q$ introduit la puissance thermique à travers une surface quelconque S. Considérons alors un tube de courant thermique et deux sections quelconques S_1 et S_2 de ce tube, délimitant un volume V du tube :



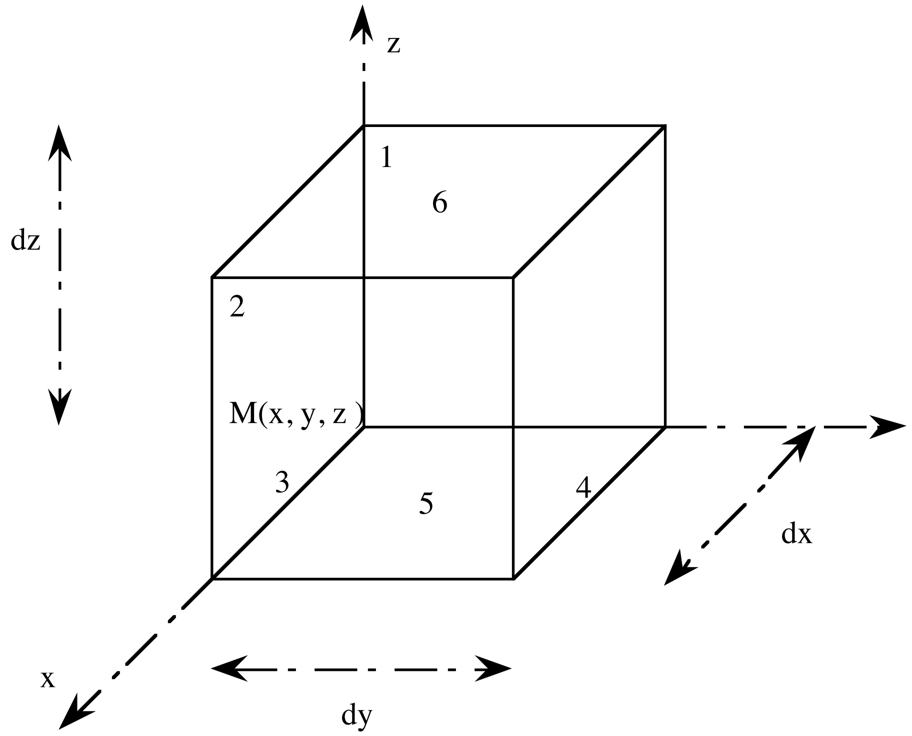
4. DIFFUSION TRIDIMENSIONNELLE

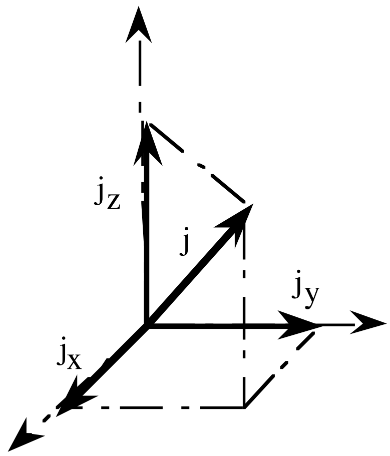
4.1. De l'intérêt de la divergence

Dans un problème tridimensionnel, toutes les grandeurs dépendent de 3 coordonnées spatiales et du temps. Ainsi, en coordonnées cartésiennes, température et courant thermique seront de la forme :

$$T(x, y, z, t) \text{ et } \vec{j}_Q(x,y,z,t) = j_{Qx}(x,y,z,t)\,\vec{e}_x + j_{Qy}(x,y,z,t)\,\vec{e}_y + j_{Qz}(x,y,z,t)\,\vec{e}_z$$

Un bilan thermique devra se faire sur un élément de volume $\delta\tau = dx\, dy\, dz$. Il nous faut évaluer en particulier la puissance thermique algébrique traversant les parois de ce volume : elle s'obtient en sommant les puissances traversant les 6 faces du cube, faces qu'on peut associer 2 par 2 .





Chacun de ces transferts sera de la forme $\vec{j}_Q.\overrightarrow{dS}$. Pour les faces 1 et 2, de surface dy dz, la seule composante de $\vec{j}_Q$ contribuant au produit scalaire est j_{Qx}. La contribution de ces 2 faces au transfert traversant les parois du cube est :

$$- j_{Qx}(x, y, z, t)\, dydz + j_{Qx}(x + dx, y, z, t)\, dydz = \frac{\partial j_{Qx}}{\partial x}\, dx\;\; dydz = \frac{\partial j_{Qx}}{\partial x}\,\delta\tau$$

La contribution de 2 autre paires s'obtient de façon identique :

faces 3 et 4 : $\dfrac{\partial j_{Qy}}{\partial y}\, dy\; dzdx = \dfrac{\partial j_{Qy}}{\partial y}\,\delta\tau$ faces 5 et 6 : $\dfrac{\partial j_{Qz}}{\partial z}\, dz\; dxdy = \dfrac{\partial j_{Qz}}{\partial z}\,\dfrac{\partial j_{Qy}}{\partial y}\,\delta\tau$

La puissance thermique totale traversant la surface fermée entourant le volume $\delta\tau$ s'écrit donc :

$$\delta P = \left[\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{Qy}}{\partial y} + \frac{\partial j_{Qz}}{\partial z}\right]\delta\tau$$

Ce calcul montre en fait que le flux d'un champ vectoriel à travers la surface fermée entourant un volume élémentaire est proportionnel à ce volume. Le flux volumique s'exprime à partir des dérivées partielles du champ vectoriel : il est appelé divergence du champ .

La définition de la divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}$ est donc :

$$\boxed{\delta\Phi = \mathrm{div}\vec{A}\ \delta\tau}$$

A l'inverse de l'opérateur gradient, l'opérateur divergence s'applique donc à un vecteur qu'il transforme en un scalaire

4.2. Cas du régime permanent

$$\boxed{\mathrm{div}\ \vec{j}_Q + \frac{\partial u_v}{\partial t} = p \quad \text{équation de diffusion thermique}}$$

De même en diffusion de particules :

$$\boxed{\mathrm{div}\ \vec{j}_n + \frac{\partial n}{\partial t} = \nu \quad \text{équation de diffusion de particules}}$$

Nous verrons en électromagnétisme et mécanique des fluides des équations de conservation tout à fait analogues portant sur la charge et la masse…

Rq. Le calcul précédent constitue en fait une démonstration du théorème de Green- Ostrogradski évoqué en Annexe . L'équivalence entre les formes locale et intégrale s'obtient directement en appliquant ce théorème :

$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \mathrm{div}\vec{j}_Q\, d\tau \quad \text{et} \quad \iiint_\tau \mathrm{div}\vec{j}_Q\, d\tau = -\iiint_\tau \frac{\partial u}{\partial t}\, d\tau\ \forall\tau \implies \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{j}_Q = p$$

A la forme locale correspond une forme intégrale réalisant en fait un bilan sur un volume V limité par une surface fermée S :

$$\boxed{\oiint_S \vec{j}_Q.d\vec{S} + \frac{d}{dt}\left(\iiint_V u_v\, d\tau\right) = P}$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{j}_n.d\vec{S} + \frac{d}{dt}\left(\iiint_V n\, d\tau\right) = N}$$

En revenant aux formes locales, avec $u_v = \rho c T$ d'une part, et les lois de Fourier et Fick d'autre part, on obtient les équations de diffusion régissant directement l'évolution de la température T et de la densité n :

$$\boxed{- \lambda \, \Delta T + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p}$$

$$\boxed{- D \, \Delta n + \frac{\partial n}{\partial t} = \nu}$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien. La résolution de ces équations, accompagnées des nécessaires conditions aux limites, fournissent une solution unique donnant l'évolution en tout point et à tout instant de la grandeur considérée.