

MESURE ET PRÉCISION

La détermination de la valeur d'une grandeur G à partir des mesures expérimentales de grandeurs a et b dont elle dépend n'a vraiment de sens que si elle est accompagnée de la précision associée, donnée sous la forme :

- d'une **incertitude absolue** ΔG ; la grandeur G a lors une valeur estimée dans l'intervalle de confiance $[G - \Delta G, G + \Delta G]$

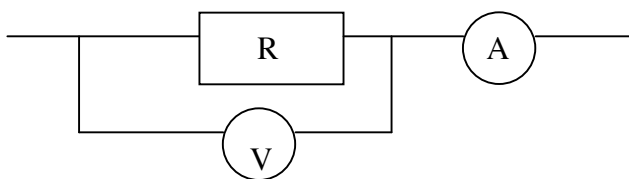
d'une **incertitude relative** $\frac{\Delta G}{G}$, souvent exprimée en pourcentage : on dit alors que G est déterminée avec une **précision** de $x\%$...

Comment déterminer les incertitudes propres à la mesure des grandeurs a et b elles-mêmes, et l'incertitude qui en découle sur la valeur de G ? Trois types d'erreurs concourent à entacher la mesure d'une incertitude : la dispersion, la résolution et le biais (ou erreur systématique). (Cf. Document annexe).

1. ERREURS SYSTEMATIQUES

Remarquons d'abord que G est calculée à partir d'une loi $G = f(a, b)$ qu'on prend comme **modèle** associé à l'expérience elle-même. L'inadéquation parfaite du modèle avec l'expérience est cause d'une **erreur dite systématique**. Entendons par là qu'on connaît (ou qu'on peut connaître) la cause de cette erreur donc quantifiable en **norme** et en **signe**.

Ainsi lors de la détermination de la valeur d'une résistance R en utilisant une méthode volt-ampéremétrique et la loi $R = \frac{U}{I}$ illustrées par l'expérience :



Il est clair que si le voltmètre mesure bien la tension U aux bornes de R , l'ampèremètre, lui, mesure l'intensité totale I' telle que $I' = I + \frac{U}{R_v}$ où R_v est la résistance du voltmètre. Un modèle plus élaboré conduit alors à :

$$R = \frac{U}{I' - \frac{U}{R_v}} = \frac{U}{I'} \frac{1}{1 - \frac{U}{R_v I'}} = R_{\text{mes}} \frac{1}{1 - \frac{R_{\text{mes}}}{R_v}}$$

$$\delta R = R_{\text{mes}} - R = R_{\text{mes}} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{R_{\text{mes}}}{R_v}} \right) = -R_{\text{mes}} \frac{\frac{R_{\text{mes}}}{R_v}}{1 - \frac{R_{\text{mes}}}{R_v}}. \text{ D'où : } \frac{\delta R}{R_{\text{mes}}} = -\frac{\frac{R_{\text{mes}}}{R_v}}{1 - \frac{R_{\text{mes}}}{R_v}}$$

$$\text{Si } R_{\text{mes}} = \frac{R_v}{100}, \text{ alors } \frac{\delta R}{R_{\text{mes}}} \approx -1\%$$

Notons que les erreurs systématiques sont parfois « cachées » dans l'utilisation des appareils eux-mêmes. Ainsi une photodiode est supposée délivrer dans certaines conditions un courant I proportionnel à l'éclairement lumineux E qu'elle reçoit. On utilise souvent ce capteur pour « mesurer » un éclairement avec la loi $I = KE$ où K est une constante caractéristique de la photodiode. En fait, même en l'absence d'éclairement, la photodiode délivre un courant dit d'obscurité I_0 , faible, mais dont on peut tenir compte en corrigeant la loi sous la forme $I = KE + I_0$.

Plus généralement encore les appareils qui utilisent des lois proportionnelles peuvent comporter des « erreurs de zéro » : on commet alors une erreur systématique en utilisant une loi $y = ax$ plutôt qu'une loi $y = ax + b$...

Comme on le voit, les erreurs systématiques entraînent donc une « dérive » de la mesure dans un sens prévisible. Lorsqu'on trouve une valeur de G qu'on compare à une valeur référencée ou tabulée, on peut se poser la question de savoir si elle est systématiquement trop faible ou trop forte, c'est-à-dire s'il existe des erreurs de type systématique qui pourraient expliquer cet écart en introduisant **un biais** sur la mesure.

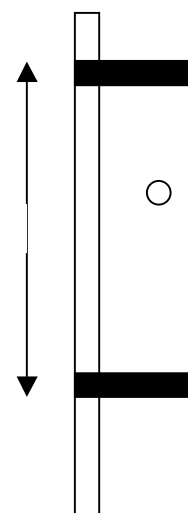
Prenons un autre exemple : on peut mesurer la valeur g du champ de pesanteur à partir de la durée de chute d'une bille entre deux capteurs :

On utilise la loi :
$$D = \frac{1}{2} g (\Delta T)^2$$

Ce modèle suppose que la vitesse de la bille soit nulle au déclenchement du premier capteur. Est-ce bien le cas ? Commet-on une erreur par excès ou par défaut sur la détermination de g en négligeant cette vitesse ?

Un retard au déclenchement des capteurs entraîne-t-il lui-même une surévaluation ou une sousévaluation de g ? etc, etc.....

Les sources d'erreurs expérimentales sur la mesure des grandeurs a et b dont G dépend sont elles-mêmes de deux types :



2. RESOLUTION

Tout appareil de mesure possède une **résolution**, c'est-à-dire un plus petit écart mesurable Δa de la grandeur a qu'il mesure : une règle graduée en cm par exemple possède une résolution égale au centimètre, résolution qu'on améliore d'un facteur 10 en graduant la même règle en mm ! Un appareil numérique qui affiche un certain nombre de « digits » a évidemment une résolution limitée à l'unité du dernier digit. Plus subtilement les appareils qui échantillonnent « sans l'afficher » ont eux-mêmes une résolution : ainsi un spectromètre numérique qui fournira sur un écran un spectre continu d'une lumière donnée possède en fait une résolution $\Delta \lambda$, ce qui signifie qu'il échantillonne ses mesures d'intensité lumineuse en fonction de λ , tous les $\Delta \lambda$.

Généralement donc, si la résolution d'un appareil de mesure de a est Δa , on peut affirmer que a n'est connue **au mieux**, qu'à Δa près...

3 ERREURS ALEATOIRES

Enfin et surtout, la mesure d'une grandeur a est entachée d'une **erreur expérimentale aléatoire** dont les causes sont multiples : fluctuations des conditions de l'expérience, appréciation par l'expérimentateur d'une situation particulière (maximum d'une tension, point de rebroussement d'une raie d'un spectre, mesure d'un certain nombre d'interfranges...).

C'est à cette **erreur** qu'il est souvent difficile d'associer une quantification de l'**incertitude** Δa sur a .

Pour évaluer cette incertitude, on effectue souvent dans des conditions qu'on espère identiques, N mesures de la grandeur a notées : $a_1, a_2 \dots a_1 \dots a_N$. Ces mesures ne sont pas toutes identiques : on dit qu'il y a **dispersion** de la mesure.

Il apparaît déjà qu'une évaluation de la grandeur a elle-même par la moyenne $m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i$ est préférable à une mesure unique de a .

En outre, on peut penser qu'une évaluation possible de Δa est donnée par la valeur absolue de l'écart extrémal par rapport à la moyenne : $\Delta a = |(a_i - m)_{\text{extr}}|$. Mais les valeurs extrêmes trouvées dépendent évidemment du nombre de mesures effectuées. Quand ce nombre augmente, le nombre des valeurs très éloignées de m augmente moins que les nombres des valeurs proches de m : plus une classe est nombreuse, plus faible est relativement le nombre des « très bons » ou « très mauvais » élèves. Prendre l'écart maximum comme incertitude revient à accorder le même poids statistiques à toutes les valeurs, et donc à surestimer Δa .

Lorsque le nombre de mesures devient très grand (idéalement infini), on constate souvent que la répartition des valeurs trouvées suit une loi bien connue en théorie des probabilités, appelée **loi de répartition gaussienne** (voir feuille Maple associée)

En pratique, on porte en abscisses les valeurs trouvées de la grandeur a et en ordonnées l'occurrence de ces valeurs (le nombre de fois qu'on les a trouvées) ce qui donne plutôt un **histogramme** des mesures.

On voit bien sur cet exemple la différence entre la résolution (plus petite variation de a détectable) et l'incertitude due à la dispersion des mesures...

La loi gaussienne donne la probabilité $dp(a)$ de trouver la valeur a à da près lors d'une mesure de a :

$$dp(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} da$$

Cette probabilité est normée à 1, ce qui signifie qu'on a « 100% » de chances de trouver une valeur de a dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ selon le calcul :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp(a) = 1 \quad (\text{sachant que } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi})$$

La loi gaussienne fait apparaître les paramètres m et σ :

- m apparaît d'abord évidemment comme la valeur de a qui correspond au maximum de la gaussienne, c'est-à-dire à une probabilité maximale.
- σ quant à lui définit l'intervalle autour de m pour lequel ce maximum est divisé par \sqrt{e} .

Mais ces paramètres ont aussi une signification plus intéressante quant à la mesure de a et son incertitude. On montre en effet que :

$m = \int_{-\infty}^{+\infty} a dp(a)$ et représente donc la valeur moyenne de a , généralisation continue du calcul

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i.$$

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - m)^2 dp(a)$ apparaît comme la valeur moyenne du carré de l'écart de a à la moyenne m . Pour cette raison σ est appelé **écart quadratique moyen** ou encore **écart-type** (ou aussi **variance**).

Plus concrètement encore on calcule qu'on a :

- 68% de chances de trouver une valeur de a dans l'intervalle $[m - \sigma, m + \sigma]$
- 95% de chances de trouver une valeur de a dans l'intervalle $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$
- 99,7% de chances de trouver une valeur de a dans l'intervalle $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$

Si on s'en tient à la plus grande exigence, un dépouillement statistique d'un grand nombre de mesures de a permet d'atteindre l'incertitude $\Delta a = 3\sigma$.

En pratique, on effectue un nombre fini de mesures et une calculette possède les fonctions permettant d'en calculer la moyenne et l'écart-type. Cependant, ne serait-ce que pour des raisons de temps, le nombre de mesures est rarement supérieur à 10 et des corrections par rapport aux lois gaussiennes idéales sont nécessaires. Ainsi, dans le calcul de l'écart-type, on montre qu'il est préférable d'utiliser une loi du type :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (a_i - m)^2 \quad \text{plutôt que} \quad \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i - m)^2$$

Enfin il faut effectuer une correction sur l'intervalle de confiance à retenir, suivant le degré d'exigence (95% ou 99,7%) et le nombre de mesures. En tout état de cause, l'écart-type σ représente bien un « étalon » caractéristique d'évaluation de l'incertitude de mesure, a restant dans un intervalle de confiance de la forme $[m - k\sigma, m + k\sigma]$

En pratique cependant et pour un T.P., on peut se contenter d'effectuer un certain nombre de mesures (plus ou moins grand suivant leur rapidité), d'écarter des valeurs extrêmes très éloignées considérées comme aberrantes, de garder la valeur moyenne des mesures retenues, et comme incertitude l'écart maximal entre les valeurs retenues et cette moyenne (qu'on pourra d'ailleurs comparer à l'écart-type).

Prenons l'exemple d'une mesure de période avec un chronomètre qui donne la série de mesures (en s) :

1,34 1,30 1,31 1,34 1,36 1,32 1,34 1,35 1,33 1,37

Une calculette donne : $m = 1,336$ $\sigma = 0,022$. Compte tenu du faible nombre de mesures, on peut raisonnablement retenir :

$$a = 1,34 \pm 0,03$$

C'est bien ici la dispersion des résultats et non la résolution du chronomètre qui limite la précision de la mesure. Un chronomètre ne donnant que la dixième de seconde aurait donné la série :

1,3 1,3 1,3 1,3 1,4 1,3 1,3 1,3 1,3 1,4

et on aurait retenu $a = 1,3 \pm 0,1$ la résolution du chronomètre donnant ici la précision de la mesure...

4 EVALUATION D'UNE INCERTITUDE GLOBALE

Comment enfin évaluer ΔG à partir des incertitudes Δa et Δb connaissant la loi $G = f(a, b)$?

On peut partir de la loi mathématique et écrire : $dG = \frac{\partial G}{\partial a} da + \frac{\partial G}{\partial b} db$

Qui, en passant aux incertitudes, donne : $\Delta G = \left| \frac{\partial G}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial G}{\partial b} \right| \Delta b$

Ainsi avec des lois du type $G = a + b$ ou $G = a - b$ on obtient $\Delta G = \Delta a + \Delta b$

$$G = a \cdot b \text{ ou } G = \frac{a}{b} \text{ on obtient } \frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Là encore, ce mode de calcul, dans la mesure où il cumule systématiquement les incertitudes, surestime l'incertitude globale sur G . Si on revient à une conception statistique de la mesure, et **si les grandeurs a et b mesurées sont indépendantes**, on montre que l'incertitude sur G doit être corrigée suivant les formules :

$$\Delta G = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta G}{G} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

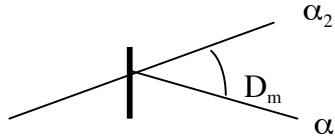
Les deux types de calcul se rejoignent évidemment si une seule des deux grandeurs a ou b est entachée d'erreur, ou si, plus physiquement, une des incertitudes est très petite devant l'autre : c'est la mesure la moins précise qui détermine finalement l'incertitude sur G ...

En revanche, pour des incertitudes du même ordre la différence de calcul n'est pas négligeable, surtout si le nombre de variables entachées d'erreur augmente. Ainsi pour une grandeur g dépendant de a, b, c déterminées chacune à 5% près le premier calcul donne une précision de 15% sur G , et le deuxième une précision de 9% !

Appliquons à présent toute cette théorie à un exemple, celui de la détermination d'une longueur d'onde inconnue λ en utilisant la méthode de minimum de déviation d'un réseau et la loi correspondante :

$$2 \sin \frac{D_m}{2} = \frac{\lambda}{a}$$

Où a est le pas du réseau d'abord supposé connu parfaitement $a = 3,3 \mu\text{m}$. Pour une valeur $D_m = 9^\circ 26'$, on trouve $\lambda = 543 \text{ nm}$. L'incertitude de mesure de λ résulte alors uniquement de l'incertitude de détermination de D_m . Cette déviation est elle-même mesurée par la différence de deux lectures d'angle :

$$D_m = \alpha_1 - \alpha_2$$


Le premier angle correspond au pointé du rayon « direct » traversant le réseau (ordre 0) : on peut considérer que l'erreur faite sur sa lecture n'est due qu'à la résolution en général égale à une minute d'angle.

Le deuxième, lui, résulte de l'appréciation du minimum de déviation c'est-à-dire du point où la raie suivie rebrousse chemin quand on modifie l'incidence sur le réseau : on a une dispersion des mesures qu'on peut évaluer par exemple à 5 minutes d'angle en effectuant une série de mesures. Suivant un calcul précédent, on a alors :

$$\Delta D_m = \sqrt{\Delta \alpha_1^2 + \Delta \alpha_2^2} \approx 5,1 \text{ minute d'angle} \approx 8,5 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ$$

La encore l'incertitude sur D_m est en pratique due à l'incertitude « d'appréciation » du minimum de déviation...

Enfin, la différenciation de la loi précédente donne :

$$\cos \frac{D_m}{2} dD_m = \frac{d\lambda}{a} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dD_m}{D_m} \frac{\frac{D_m}{2}}{\tan \frac{D_m}{2}} \approx \frac{dD_m}{D_m}$$

D_m étant faible, on aurait pu en fait linéariser la loi pour obtenir directement ce dernier résultat.

Si en outre le pas est donné (par exemple par le constructeur) avec une précision de 5%, on obtient avec la loi linéarisée $D_m = \frac{\lambda}{a}$:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\Delta D_m}{D_m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2} \approx 5,1 \%$$

C'est l'incertitude sur le pas qui prédomine et on retient alors $\lambda = 543 \pm 28 \text{ nm}$

5. UTILISATION D'UN LOGICIEL

Parfois la grandeur G à déterminer intervient comme paramètre dans une loi liant deux grandeurs mesurées x et y , dont on relève la valeur selon un ensemble de couples (x_i, y_i) .

Un logiciel tel que Synchronie permet alors tout à la fois de valider le modèle mathématique support de l'expérience et d'en tirer la grandeur G . Le plus souvent, on cherche à rendre linéaire la loi $y = f(x)$ en la mettant sous la forme $f_1(x, y) = a f_2(x, y) + b$.

Grâce au logiciel, la rentrée des couples (x, y) permettra de tracer la courbe expérimentale $f_1 = f_2$, courbe qu'on modélisera par une droite dont le logiciel donnera la pente a et l'ordonnée à l'origine b .

La grandeur G à mesurer sera elle-même déduite de a ou b ...

Ainsi par exemple, dans un circuit comprenant en série un générateur de tension E , une résistance R et une bobine de caractéristiques L, r , la tension U aux bornes de R s'écrit :

$$U = E \frac{R}{\sqrt{(R+r)^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}}$$

On peut alors faire varier la fréquence f et mesurer un ensemble de couples (f, U) . La loi peut être rendue linéaire sous la forme :

$$\left(\frac{E}{U}\right)^2 = \left(\frac{2\pi L}{R}\right)^2 f^2 + \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2$$

La courbe donnant $\left(\frac{E}{U}\right)^2$ en fonction de f^2 doit pouvoir être modélisée par une droite dont la pente permet de remonter à la valeur de L ...

Cette méthode a bien sûr été appliquée bien avant l'existence de logiciels d'acquisition et de traitement : la courbe $Y = f(X)$ était tracée sur papier millimétré. Les incertitudes sur X et Y permettaient de tracer des « rectangles d'incertitudes, et on cherchait à faire passer un faisceau de droites par ces rectangles.

Comment opère un logiciel tel que Synchronie ?

Indépendamment de toute incertitude sur X et Y , le logiciel peut modéliser la courbe par une fonction mathématique donnée dont le logiciel indique les paramètres. Dans le cas d'une droite, il donnera la valeur numérique de la pente et l'ordonnée à l'origine.

Remarquons dès à présent que, même si les points s'éloignent considérablement d'une droite, autrement dit si la loi utilisée n'est pas cohérente avec l'expérience, le logiciel tracera quand même la droite la moins mauvaise dont il donnera pente et ordonnée à l'origine !

En outre, si on indique à Synchronie une incertitude ΔX sur X et ΔY sur Y (malheureusement ce logiciel ne permet pas de faire varier ces valeurs selon les points de mesure), alors il renverra les valeurs de la pente et de l'ordonnée à l'origine avec une incertitude...

Reste enfin à évaluer la « validité » du modèle utilisé : comme on l'a vu, Synchronie « obéit » à la demande de l'utilisateur et trace une droite par exemple si on impose une loi affine, même si les points ne s'alignent pas du tout.

Néanmoins un dernier paramètre donné par Synchronie permet d'évaluer la validité du modèle et prenant en compte les incertitudes rentrées sur X et Y : c'est le C_m (critère d'optimisation de la modélisation). Sans entrer

dans les détails du calcul de ce coefficient, qui prend en compte les points de mesure, leur nombre et le nombre de paramètres de la loi utilisée (2 pour une loi de type $y : ax + b$), on peut retenir le résultat suivant :

Le modèle est d'autant mieux validé par l'expérience que C_m est proche de 1 : un C_m trop important montre que le modèle n'est pas valide (points trop dispersés par rapport à la courbe), un C_m trop faible montre au contraire qu'on a surévalué les incertitudes...

Pour s'en convaincre, raisonnons sur un exemple simple. Considérons trois séries de couples (x,y) :

(1 ; 5,4) (2 ; 6,5) (3 ; 9,8) (4 ; 12) (5 ; 13,6) (6 ; 16) avec $\Delta x = 0,05$ et $\Delta y = 0,2$

(1 ; 5,1) (2 ; 6,9) (3 ; 9,2) (4 ; 11,1) (5 ; 12,8) (6 ; 14,9) avec $\Delta x = 0,5$ et $\Delta y = 0,7$

(1 ; 5,1) (2 ; 6,9) (3 ; 9,2) (4 ; 11,1) (5 ; 12,8) (6 ; 14,9) avec $\Delta x = 0,05$ et $\Delta y = 0,2$

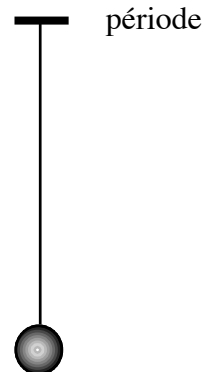
Et observons les résultats fournis par Synchronie sur un modèle $Y = aX + b$ (Document Annexe).

6 ETUDE CONCRETE D'UN EXEMPLE SIMPLE

Nous nous proposons de déterminer la constante g en utilisant la loi de variation de la période d'un pendule simple en fonction de sa longueur :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Nous disposons d'un tel pendule et d'un chronomètre :



Erreurs systématiques dues au modèle

Le modèle est-il adapté à l'expérience ? Le pendule n'est pas « simple » dans la mesure où la masse m n'est pas vraiment ponctuelle... Une étude plus poussée permettrait de modifier la loi sous la forme :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + \frac{2}{5}R^2}{gl}},$$

où R est le rayon de la boule et l la distance de l'axe de rotation au centre de la boule. En prenant la formule simplifiée, on commet donc une erreur systématique **par défaut** ...

On néglige en fait R^2 devant l^2 : si $R \approx 1\text{cm}$ et $l \approx 25\text{cm}$, l'erreur est de 0,2 %...

On sait en outre que la période des oscillations dépend de l'amplitude et peut être corrigée suivant la formule :

$$T' = T\left(1 + \frac{\theta_m^2}{16}\right)$$

L'erreur relative commise sur T est donc une erreur par excès de l'ordre de : $\frac{T' - T}{T} = \frac{\theta_m^2}{16} \approx 1,5\%$

pour une amplitude d'un demi radian environ (soit une trentaine de degrés).

Il en résulte une erreur par défaut sur g de l'ordre de :

$$\frac{\Delta g}{g} = -2 \frac{\Delta T}{T} \approx -3\%$$

Cette erreur est clairement prépondérante devant la précédente...

Incertitude de mesure de l

La précision de mesure de l est évidemment déjà imposée par la résolution de la règle, graduée en mm. Mais elle résulte aussi de l'évaluation des extrémités du fil : axe d'oscillation et surtout centre de la boule. On peut imaginer qu'il est plus simple de repérer le haut de la boule et d'ajouter son rayon (mesuré par exemple en évaluant le diamètre D au palmer...). On aurait alors dans la formule

$$l = l_{\text{mes}} + R$$

On verra qu'en fait on peut, sans erreur, se contenter de l_{mes} grâce au traitement de linéarisation de la formule. Il paraît alors raisonnable de retenir $\Delta l \approx 2\text{mm}$ imposée par la résolution seulement.

Incertitude de mesure de T

Là encore la résolution du chronomètre est essentielle : elle vaut $1/10^{\text{ème}}$ de seconde et est bien sûr identique pour toute durée mesurée. La précision est donc d'autant plus importante que la durée mesurée est grande, d'où l'idée de mesurer non pas une mais une dizaine de périodes : on aura alors

$$\Delta(10T) \approx 10 \Delta T \approx 0,1\text{s pour ce qui concerne la résolution...}$$

Mais une autre incertitude s'ajoute : celle qui correspond à l'évaluation du début et de la fin de la mesure autrement dit le déclenchement et l'arrêt du chronomètre. L'expérimentateur commet nécessairement une erreur en déclenchant et arrêtant le chronomètre à ce qu'il estime être un même point d'oscillation, par exemple le point le plus haut. Il s'agit d'une erreur de temps qui sera d'autant plus faible que la position évaluée sera proche de la position exacte, donc que la vitesse du pendule sera grande au voisinage de ce point. A cet égard, le passage par la position d'équilibre, où la vitesse est maximale semble le plus approprié à la mesure. Reste à évaluer l'erreur commise. La méthode la plus simple semble alors de répéter la mesure de 10 périodes plusieurs fois et regarder la dispersion des résultats. On ne peut évidemment faire une vraie étude statistique car le nombre de mesures sera certainement inférieur à 10, mais tout au plus considérer que le plus grand écart à la moyenne représente l'incertitude sur $10T$... (sans doute supérieure à la résolution du chronomètre).

Utilisation de Synchronie

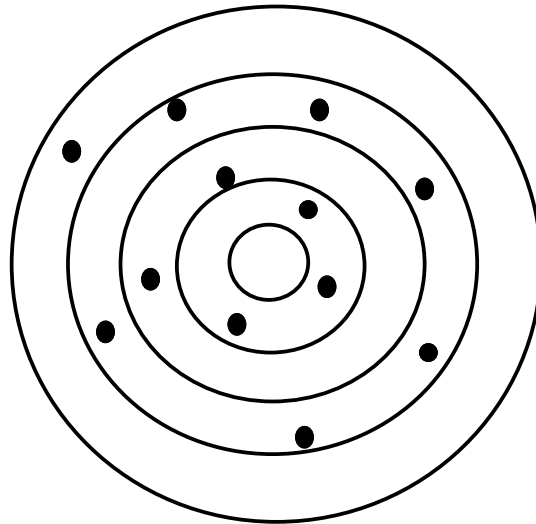
Comme on l'a dit précédemment, on linéarise la loi précédente sous la forme :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_{\text{mes}} + \frac{4\pi^2}{g} R$$

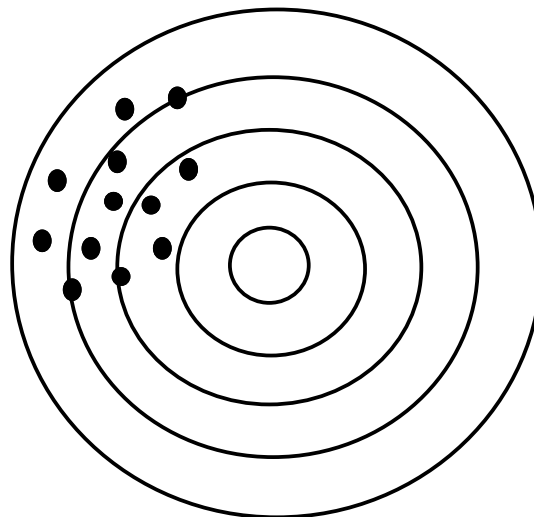
On voit bien alors qu'il est inutile de mesurer le rayon de la boule et qu'on peut se contenter de la longueur mesurée d'une extrémité à l'autre du fil de suspension : la courbe $T^2 = f(l_{\text{mes}})$ peut être modélisée par une droite de pente $\frac{4\pi^2}{g}$. Compte tenu des informations rentrées, Synchronie donnera cette pente avec sa précision et l'estimation du critère d'optimisation. On en déduira g et la précision associée (identique à celle sur la pente ...). On n'oubliera pas enfin de comparer cette précision avec les erreurs systématiques précédemment évoquées.

LES 3 TYPES D'ERREURS

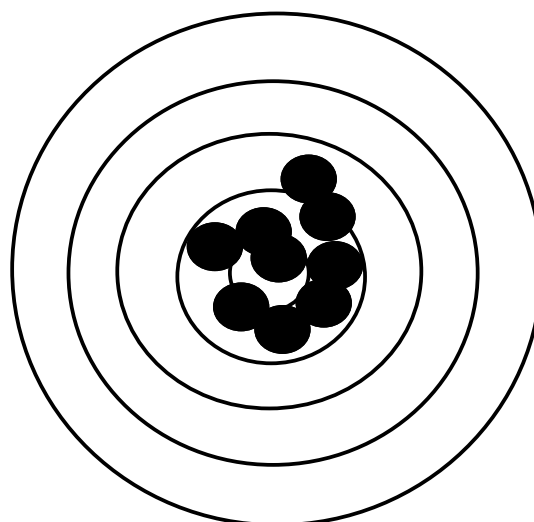
Dispersion :



Erreur systématique :



Résolution :



```
> restart:
m:=12;sigma:=3;
```

$m := 12$

$\sigma := 3$

```
> f:=x->(1/(sqrt(2*Pi)*sigma))*exp(-(x-m)^2/(2*sigma^2));
```

$$f := x \rightarrow \frac{e^{\left(-1/2 \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

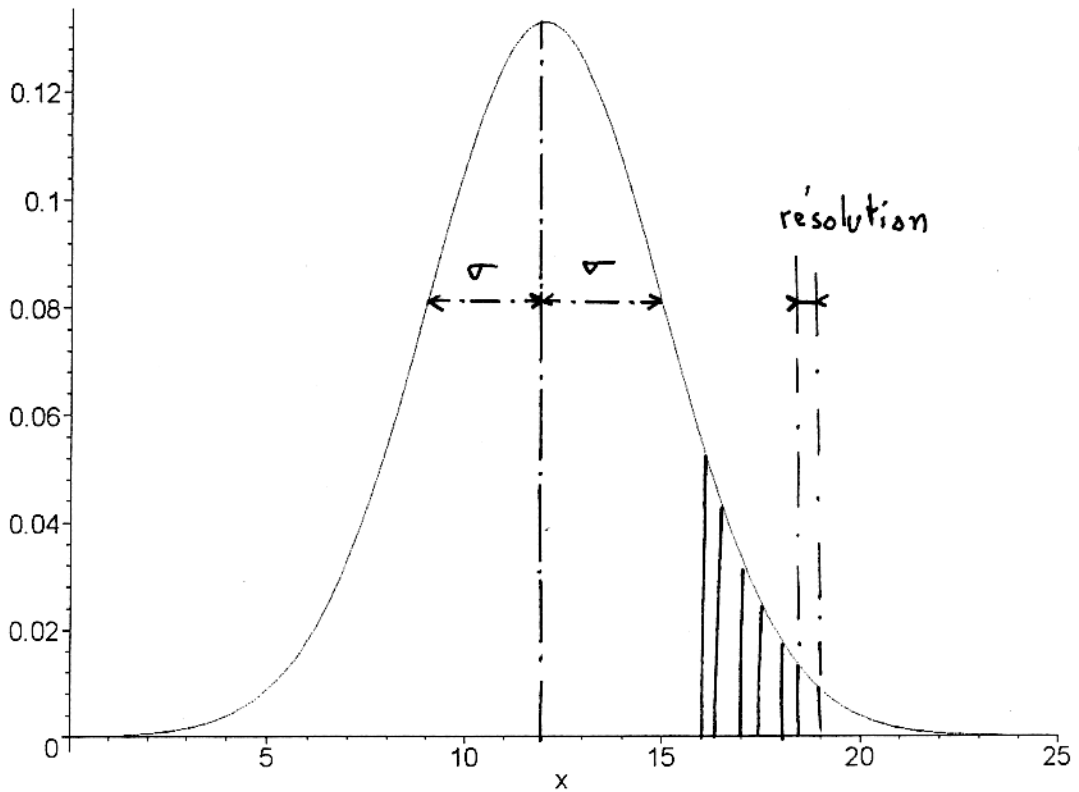
```
> f(12);f(12+3);f(12-3);
```

$$\frac{1}{6} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{1}{6} \frac{\sqrt{2} e^{(-1/2)}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{1}{6} \frac{\sqrt{2} e^{(-1/2)}}{\sqrt{\pi}}$$

```
> plot(f(x),x=0..25);
```



```
>
```