T.P.
OSCILLATEURS COUPLES

1. ELEMENTS DE THEORIE DES OSCILLATEURS COUPLES

1.1 Oscillations libres

Deux grandeurs X_1 et X_2 associées à deux oscillateurs identiques couplés obéissent aux équations :

$$\ddot{X}_1 + \omega_0^2 X_1 + A(X_1 - X_2) = 0$$

$$\ddot{X}_2 + \omega_0^2 X_2 + A(X_2 - X_1) = 0$$

Un découplage par somme et différence fait apparaître deux pulsations propres et deux modes propres associés :

- dans le mode antisymétrique, les grandeurs X_1 et X_2 sont égales $X_1 = X_2$ (donc en phase) et oscillent à la pulsation propre $\omega_1 = \omega_0$. Le couplage en fait n'intervient pas dans ce mode.

- dans le mode symétrique, les grandeurs X_1 et X_2 sont opposées $X_1 = - X_2$ (donc en opposition de phase) et oscillent à la pulsation propre $\omega_é = \sqrt{\omega_0^2 + 2A}$

Ces modes sont sélectionnés par les conditions initiales respectant elles-mêmes les conditions des modes propres. Pour des conditions initiales quelconques, le mouvement est une combinaison linéaire des modes et pulsations propres.

Ainsi, aux conditions initiales $X_1 = a$, $X_2 = 0$, correspond le mouvement dit des « pendules sympathiques » pour lequel :

$$X_2 = a\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t.\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t \qquad X_2 = a\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t.\sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t$$

Dans le cas d'un couplage faible, $\omega_2 \approx \omega_0 (1 + \frac{A}{\omega_0^2}$) et le mode sympathique devient :

$$X_2 = a\sin(\frac{A}{2\omega_0^2}t).\sin\omega_0 t \qquad X_1 = a\cos(\frac{A}{2\omega_0^2}t).\cos\omega_0 t$$

1.2 Oscillations forcées

L'équation de mouvement d'une des grandeurs (X_1 par exemple) est modifiée par l'apparition d'un second membre sinusoïdal, **de pulsation imposée ω** .

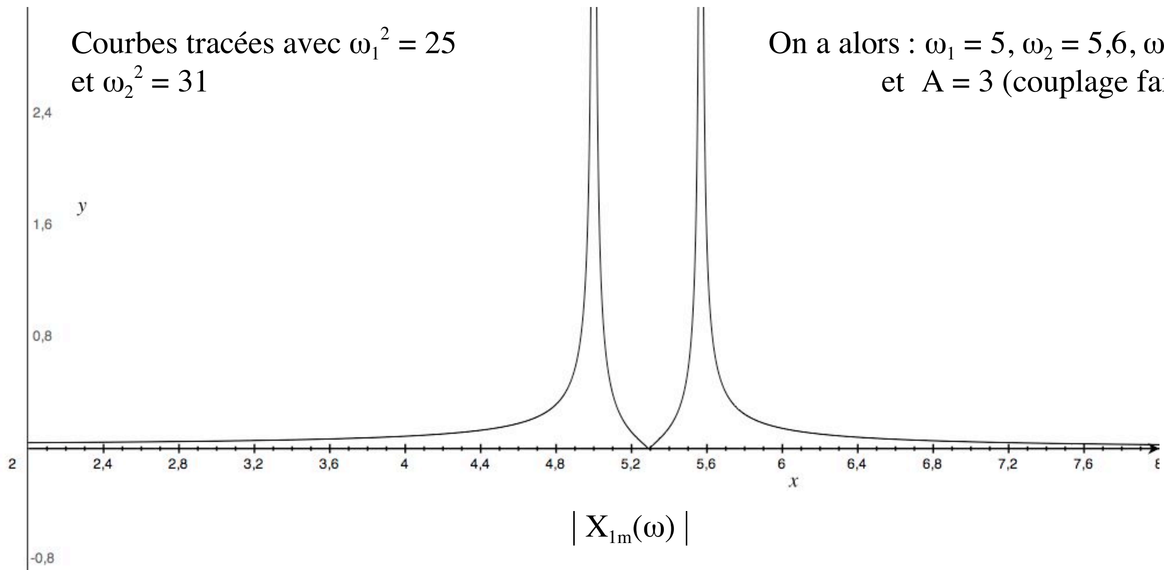
$$\frac{d^2X_1}{dt^2} + \omega_0^2 X_1 + A(X_1 - X_2) = Y_0 \cos\omega t$$
$$\frac{d^2X_2}{dt^2} + \omega_0^2 X_2 + A(X_2 - X_1) = 0$$

On obtient alors des oscillations forcées à la pulsation ω, d'amplitudes :

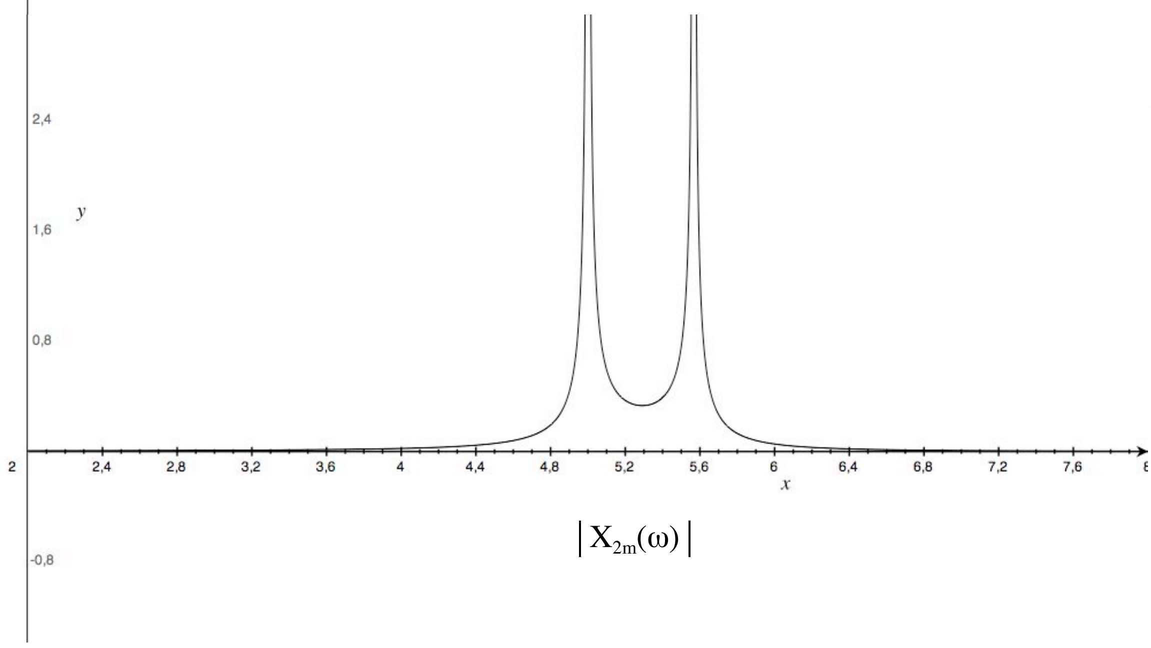
$$X_{2m}(\omega) = Y_0 \frac{A}{\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)} \qquad \text{et} \qquad X_{1m}(\omega) = Y_0 \frac{\left(\omega_0^2 + A - \omega^2\right)}{\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)}$$

On observe alors :

- un phénomène de résonance pour X_{1m} et X_{2m} quand ω est égale à l'une ou l'autre des pulsations propres
- un phénomène d'antirésonance quand $\omega^2_3 = \omega_0^2 + A$: X_{1m} est alors nulle et X_{2m} minimale :



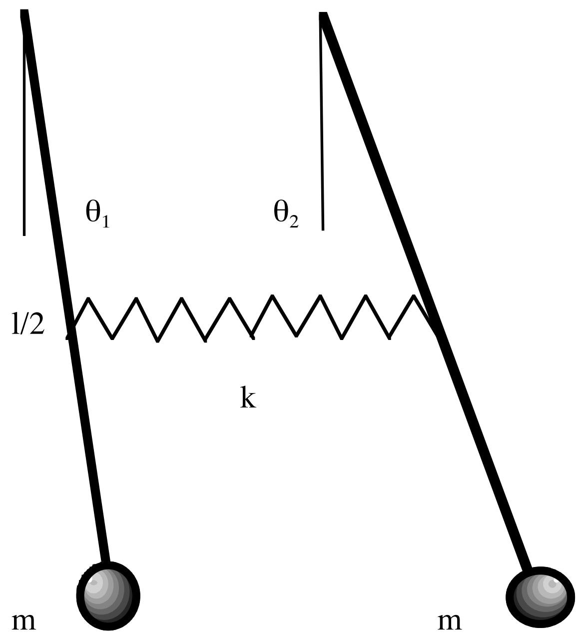
$|X_{1m}(\omega)|$



$|X_{2m}(\omega)|$

2. OSCILLATIONS LIBRES EN MECANIQUE

Le système est formé de deux pendules « simples » identiques couplés par un ressort de liaison fixé aux milieux des tiges des pendules :



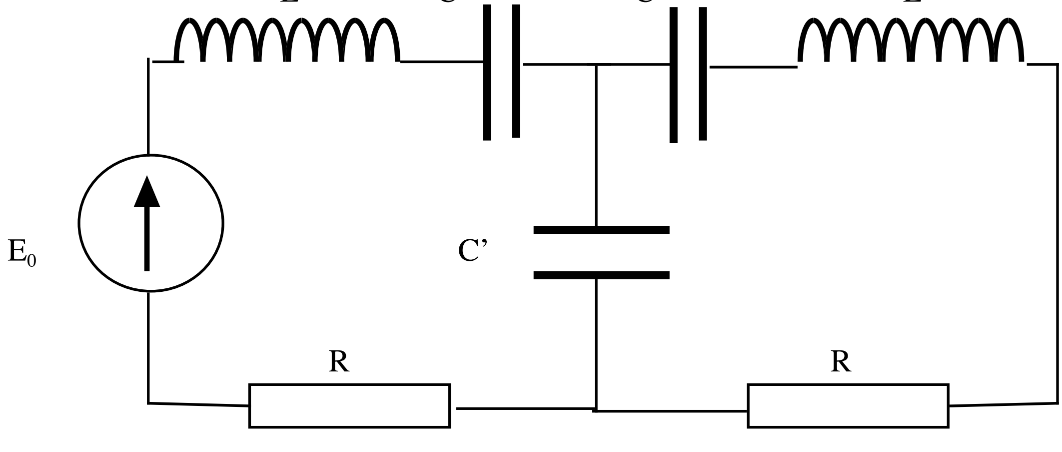
Enregistrer le mouvement d'un pendule unique et en déduire la vlaeur de ω_0. Sélectionner et enregistrer les modes symétriques et antisymétriques. Observer les déphasages entre X_1 et X_2. Mesurer les pulsations propres correspondantes et en déduire une première valeur de A.

Sélectionner et enregistrer le mouvement dit des pendules sympathiques. Observer le « déphasage » entre X_1 et X_2. Déterminer une deuxième valeur de A. Commenter et conclure.

Identifier les pulsations propres et le coefficient de couplage à partir des paramètres m, l, k du système…

3. OSCILLATIONS FORCEES EN ELECTRICITE

Le système est formé de deux circuits L,C couplés par un condensateur de capacité C'. En pratique les circuits comprennent aussi une résistance R dont la tension aux bornes donnera une image des courants I_1 et I_2 .



En pratique, en raison des problèmes de masse, on observe les tensions RI_1 aux bornes de R_1 et $RI_1 + RI_2$ aux bornes de l'ensemble R_1, R_2. On utilisera la fonction mathématique différence de l'oscilloscope pour revenir à RI_2

Pour les valeurs numériques, on prend :

$$L = 100 \text{ mH} \quad C = 100 \text{ nF} \quad C' = 10 \text{ nF} \quad R = 100\ \Omega \quad E_0 = 5 \text{ V}$$

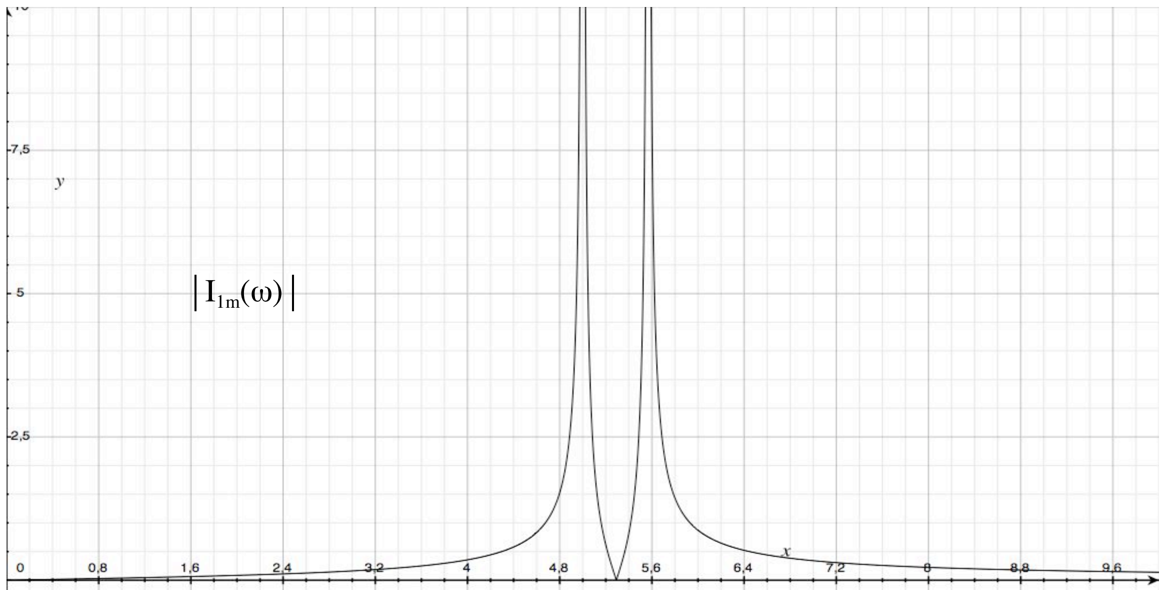
Visualiser les courants I_1 et I_2 sur l'oscilloscope. Déterminer expérimentalement les fréquences de résonance et d'antirésonance. Observer les déphasages entre les courants en fonction de la fréquence.

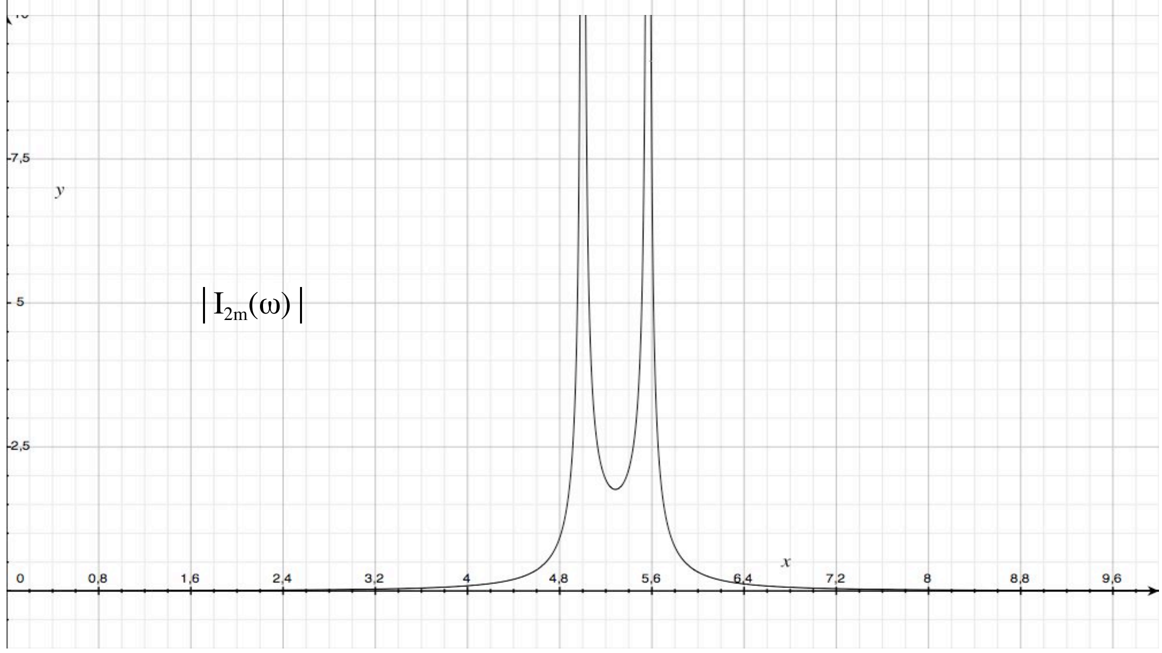
Etudier et tracer les courbes $I_{1m}(f)$ et $I_{2m}(f)$

Rq. On étudie ici les courants qui représentent en fait les dérivées temporelles des grandeurs X abstraites définies précédemment. Les courbes théoriques correspondantes sont du type :

$$I_{2m}(\omega) = Y_0 \frac{A\omega}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \quad \text{et} \quad I_{1m}(\omega) = Y_0 \frac{(\omega_0^2 + A - \omega^2)\omega}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}$$

ce qui donne des courbes similaires :





Comparer courbes expérimentales et courbes théoriques.