L'utilisation des calculatrices est autorisée. Les deux problèmes sont indépendants

***

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

***

PROBLEME I
ANALOGIES RHEOELECTRIQUES

I. Questions préliminaires

On considère l'écoulement plan, permanent, irrotationnel, d'un fluide parfait incompressible. Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(\vec{e}_x\ ,\vec{e}_y\right)$, $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ étant deux vecteurs unitaires. En tout point du plan défini par les coordonnées (x,y), le vecteur vitesse du fluide sera noté $\vec{V}\left|\begin{matrix} v_x \\ v_y \end{matrix}\right.$.

I.1. Donner sans démonstration l'équation de continuité. Indiquer la signification physique de cette équation.

Quelles sont les conditions pour qu'il existe un potentiel de vitesse ϕ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{grad\phi}$?
Ecrire les relations liant les composantes du vecteur vitesse et le potentiel des vitesses.

I.2. Donner l'équation vérifiée par le potentiel de vitesse. Quel est le nom de cette équation ?

I.3. Après avoir défini la notion de ligne de courant, établir, dans le repère $\left(\vec{e}_x\ ,\vec{e}_y\right)$, que l'équation d'une telle ligne est donnée par :

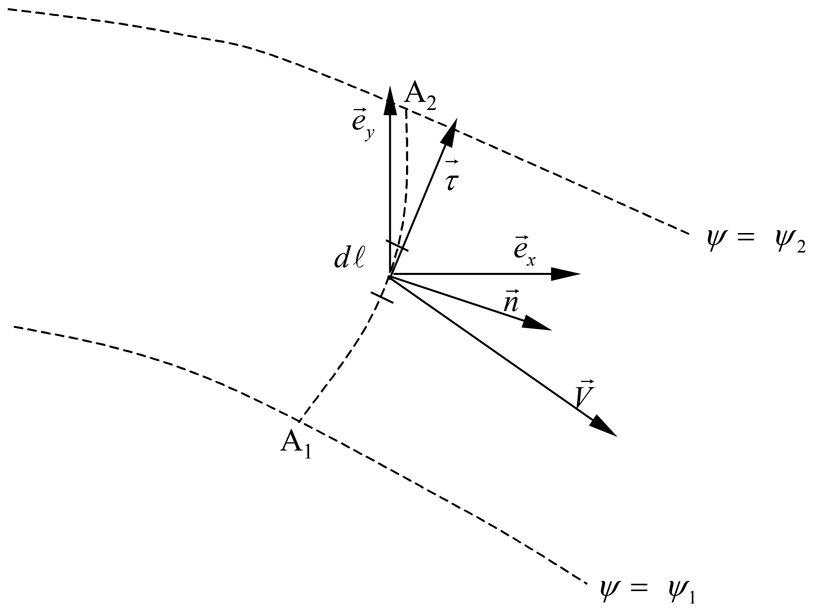
$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y}.$$

I.4. On désignera maintenant par ψ une fonction, appelée fonction de courant, définie par :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{et} \quad v_{\mathrm{y}} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Après avoir écrit la différentielle de la fonction ψ, montrer que sur une ligne de courant, ψ est une constante.
Justifier brièvement que $\Delta \psi = 0$ dans tout le champ de l'écoulement (**on rappelle que l'écoulement est irrotationnel**).

I.5. On considère maintenant l'écoulement plan, permanent, irrotationnel, d'une lame de fluide parfait incompressible. Soient deux lignes de courant définies par les valeurs ψ_1 et ψ_2 de la fonction de courant ψ (figure 1).



- Figure 1 -

Ecrire l'expression du débit volumique élémentaire dQ_v par unité de hauteur de fluide à travers l'arc de courbe $d\ell$ tel que $d\ell\ \vec{\tau} = dx\ \vec{e}_x + dy\ \vec{e}_y$, où $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à l'arc de courbe $\left(A_1A_2\right)$.

Montrer que :

$$d\psi = \vec{V}.\vec{n}\ d\ell$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à $d\ell$.

Montrer que le débit volumique par unité de hauteur de fluide, à travers l'arc $\left(A_1A_2\right)$, circulant entre les deux lignes de courant, est donné par :

$$Q_v = \left(\psi_2 - \psi_1\right)$$

I.6. On admettra maintenant que le vecteur vitesse $\vec{V}$ est porté par le vecteur normal $\vec{n}$.

Donner l'équation vérifiée par une ligne équipotentielle en fonction de ϕ, des dérivées partielles de ϕ par rapport à x et y, ainsi que de dx et dy.

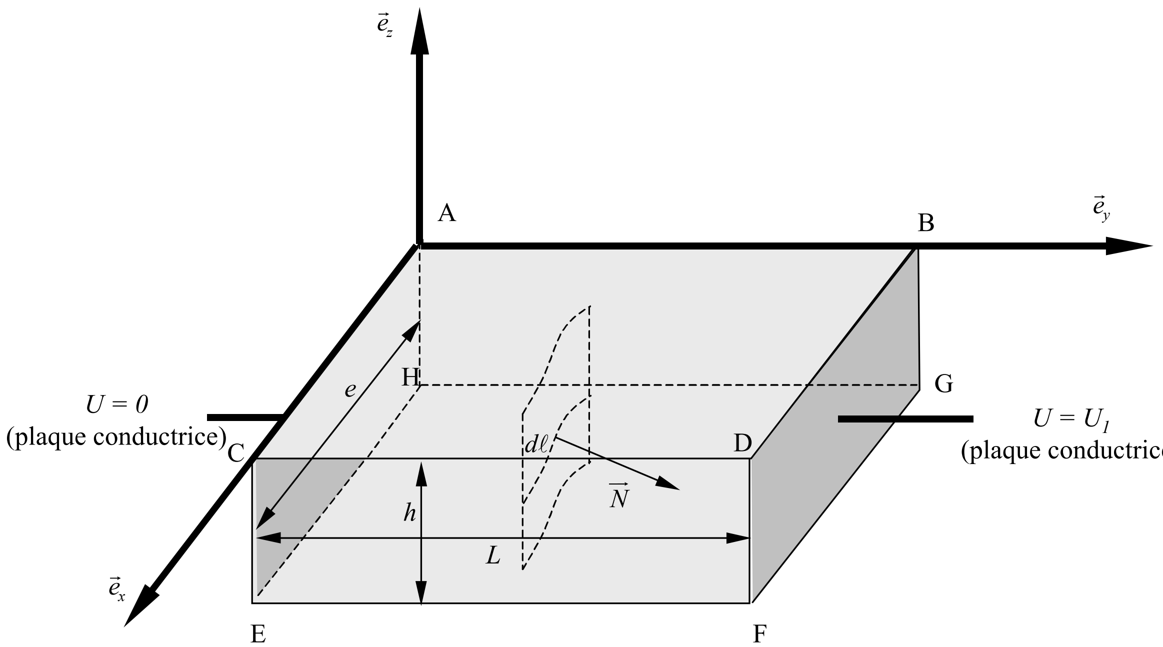
Exprimer le produit scalaire $\vec{V}\ .\ \vec{\tau}$ en fonction de $d\ell$ et $d\phi$. Que vaut ce produit scalaire ?

En déduire l'orientation des lignes équipotentielles par rapport aux lignes de courant.

Tracer, sur un même schéma, un réseau de lignes de courant et d'équipotentielles de vitesse, en faisant figurer le vecteur vitesse $\vec{V}$. On indiquera sur le schéma, pour chaque famille de lignes, la mention « ψ = constante » ou « ϕ = constante ».

II. Analogies rhéoélectriques

Un fluide **au repos**, conducteur de l'électricité, homogène et isotrope, de conductivité σ, est placé dans une cuve rectangulaire (appelée cuve rhéoélectrique) de longueur L et de largeur e. La hauteur du fluide est h. Les parois latérales de la cuve (A,C,E,H) et (B,D,F,G) sont des conducteurs parfaits de l'électricité, la paroi (A,C,E,H) étant reliée à la masse et la paroi (B,D,F,G) étant portée, de manière uniforme, au potentiel $U = U_1$. Les plans (A,B,G,H) et (C,D,F,E), ainsi que le fond de la cuve (H,G,F,E), sont des isolants électriques.
On supposera de plus, qu'en tout point de la cuve, le potentiel U est indépendant de la hauteur z (figure 2).
Soit $\vec{j}$ le vecteur densité de courant s'établissant dans le liquide.



\- Figure 2 -

II.1. Ecrire l'équation vectorielle reliant $\vec{j}$ à la conductivité σ du fluide et au potentiel électrique U.

Soit une surface S fermée, orientée vers l'extérieur par un vecteur unitaire normal $\vec{N}$, délimitant le volume conducteur T. Ecrire l'expression de l'intensité du courant I traversant (en sortant) la surface fermée S.
Ecrire, en la justifiant, l'expression locale de la conservation de la charge électrique sur la surface fermée S.
En déduire l'équation vérifiée par le potentiel électrique, analogue à une équation rencontrée en mécanique des fluides. Ecrire cette équation.

II.2. Montrer que le vecteur $\vec{j}$ se trouve dans le plan (x,y).

Ecrire l'expression du courant élémentaire dI traversant un élément de surface dS de hauteur h, soutendu par l'arc $\mathrm{d}\ell$, tel que $\mathrm{d}\ell$ appartient à un plan parallèle au plan (x,y) (figure 2).
Ecrire l'expression de dI en fonction de h, σ, U et $\mathrm{d}\ell$.

Dans toute la suite du problème, le symbole « ≡ » désignera, non pas l'égalité formelle entre deux quantités, mais l'analogie entre ces deux quantités.

II.3. Pour que l'on puisse établir une analogie entre le potentiel de vitesse ϕ de la mécanique des fluides et le potentiel électrique *U*, soit $\phi \equiv U$, montrer que la fonction de courant ψ et l'intensité du courant *I* doivent être reliées par :

$$\psi \equiv \frac{I}{\sigma h}$$

On appellera cette analogie « analogie A ».

*En utilisant les propriétés des fonctions ϕ et ψ, on peut montrer que l'on peut établir une seconde analogie (dite « **analogie B** ») telle que $\psi \equiv U$ et $\phi \equiv -\dfrac{I}{\sigma h}$.*

II.4. Décrire qualitativement les analogies A et B en termes d'équipotentielles de vitesse et électriques, ainsi que de lignes de courant fluides et électriques.

III. Application à l'étude des écoulements autour d'un obstacle immobile

On s'intéresse à l'écoulement plan d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre solide immobile, de rayon a, de hauteur infinie et d'axe Oz.

III.1. Représenter schématiquement les lignes de courant d'un tel écoulement en indiquant les points remarquables. Préciser la condition que doit satisfaire la vitesse $\vec{V}$ sur les parois du cylindre.

III.2. On souhaite utiliser **l'analogie A** pour caractériser l'écoulement autour de ce cylindre. On place donc un cylindre de rayon *a* dans la cuve rhéoélectrique décrite dans la partie II. L'axe du cylindre est disposé suivant l'axe $\vec{e}_z$ de la cuve (figure 2). **La simulation de l'écoulement du fluide dans la cuve est assurée par l'application d'une différence de potentiel entre les deux parois conductrices**. Les dimensions de la cuve sont supposées grandes par rapport à celles du cylindre.
A l'aide d'une sonde exploratrice, on est capable de déterminer la valeur du potentiel électrique en tout point de la cuve.
On souhaite mener à bien **l'analogie A**. Quelle doit être la nature du matériau constituant le cylindre : doit-il être isolant ou conducteur de l'électricité ? On justifiera la réponse.
Proposer un méthode pratique permettant de déterminer les lignes de courant à partir du relevé des potentiels.

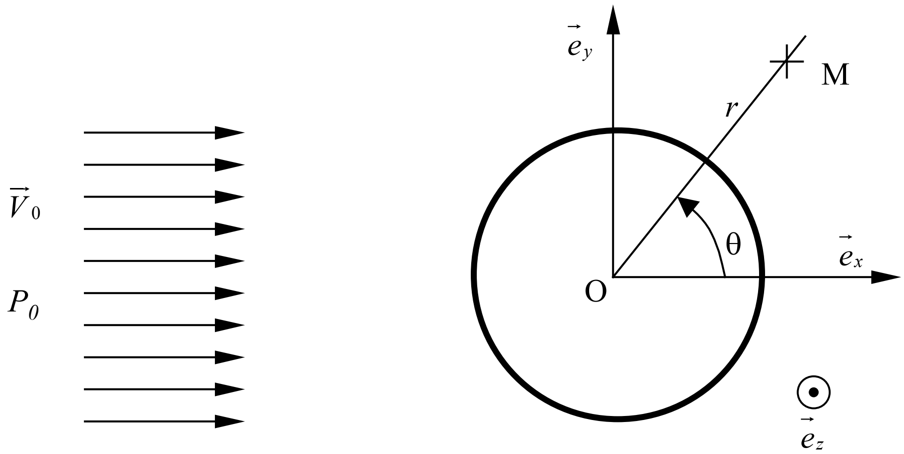
III.3. On souhaite maintenant employer plutôt **l'analogie B**, en utilisant exactement la même cuve rhéoélectrique.
En justifiant la réponse, donner la nature du matériau avec lequel doit être constitué le cylindre : doit-il être isolant ou conducteur de l'électricité ?

III.4. Pour chacune des analogies A et B, représenter sur un schéma dans le plan (*x,y*), la cuve, le cylindre, les lignes de courant fluide simulées et le sens de l'écoulement simulé. On veillera à bien préciser sur le schéma la position des deux plaques conductrices de la cuve.

On admettra que le potentiel des vitesses, en tout point M d'un écoulement uniforme d'air, de vitesse V_0, en présence d'un cylindre de rayon a, de hauteur infinie et d'axe Oz, est donné par :

$$\phi(M) = V_0\, r \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta$$

r et θ représentent les coordonnées polaires d'un repère orthogonal à $\vec{e}_z$ centré en O, centre du cylindre (figure 3). La pression de l'écoulement non perturbé par le cylindre sera notée P_0.



- Figure 3 -

III.5. Déterminer les composantes polaires du vecteur vitesse V_r et V_θ.
On rappelle les composantes du gradient d'une fonction F en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{grad}F \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

Préciser les points d'arrêt.
Donner, sans démonstration, les composantes F_x et F_y de la force exercée par le fluide sur la surface du cylindre par unité de hauteur de cylindre.

IV. Ecoulement autour d'un cylindre en rotation
On met maintenant le cylindre en rotation autour de son axe fixe avec une vitesse angulaire ω uniforme, dans le sens horaire.
Pour tenir compte de l'effet de la rotation du cylindre sur l'écoulement du fluide, on ajoute dans l'expression du potentiel des vitesses une singularité tourbillonnaire de circulation Γ. La circulation du vecteur vitesse $\vec{V}$ sur une courbe Ω est définie par :

$$\Gamma = \int_{\Omega} \vec{V}.\mathrm{d}\vec{\ell} \quad \text{où} \quad \mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\ \vec{e_x} + \mathrm{d}y\ \vec{e}_y\,.$$

Le potentiel des vitesses devient alors :

$$\phi(M) = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + V_0\, r\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta.$$

IV.1. Le modèle adopté jusqu'ici, celui du fluide parfait, permet-il de rendre compte de l'effet de la rotation du cylindre sur l'écoulement du fluide ?
A quelle propriété du fluide doit-on faire appel ?
Donner les nouvelles expressions de V_r et V_θ, ainsi que le module de la vitesse.

Tournez la page S.V.P.

IV.2. En se plaçant aux points particuliers $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$, donner, en le justifiant avec précision, le signe de la circulation Γ (rappel : le sens de rotation du cylindre est horaire).

IV.3. Donner la condition d'existence de deux points d'arrêt sur la surface du cylindre.
De cette condition, déduire l'expression de la circulation Γ en fonction de θ_0, a et V_0, où θ_0 est l'angle géométrique localisant les points d'arrêt sur le cylindre.

IV.4. Etablir, en fonction de r, θ, V_0, P_0, a et Γ, l'expression de la pression P en tout point de la surface du cylindre.
Etablir, en fonction de ρ, V_0 et Γ, la composante F_y, appelée portance, de l'action de l'air sur le cylindre, par unité de hauteur de cylindre.
Donner quelques exemples d'application de cette force.

IV.5. On désire maintenant simuler cette situation dans la cuve rhéoélectrique. Le cylindre est disposé dans la cuve tel que son axe soit parallèle à $\vec{e}_z$.
Exprimer la circulation Γ, définie à la question IV, uniquement en fonction du potentiel de vitesse ϕ.
En se plaçant dans le cadre de **l'analogie B**, en déduire l'équivalent de la circulation Γ en grandeurs électriques.
On désigne par I_s l'intensité du courant traversant le contour fermé (C) d'un solide conducteur de l'électricité placé dans la cuve rhéoélectrique. Déterminer une relation entre la circulation $|\Gamma|$, le courant I_s, la conductivité σ et la hauteur h du fluide dans la cuve.

IV.6. Comment, dans la pratique, peut-on simuler par **l'analogie B**, la circulation Γ qui apparaît lorsque l'on met le cylindre en rotation ?

IV.7. Exprimer la résistance R du fluide entre les deux parois conductrices en fonction des dimensions de la cuve e et L, de la hauteur de fluide h et de la conductivité σ lorsque le cylindre n'est pas dans la cuve.

IV.8. Déterminer une relation d'analogie entre la vitesse V_0, la longueur L de la cuve et le potentiel U_1, en utilisant la notion de débit volumique.
Montrer que dans le cadre de **l'analogie B**, la force de sustentation par unité de hauteur, exercée sur le cylindre, doit être analogue à :

$$|F_y| \equiv \rho\, I_s\, R\, U_1\, \frac{e}{L^2}.$$

IV.9. Pour s'affranchir des problèmes de similitudes dimensionnelles, on définit le coefficient sans dimension C_y, relatif à la force de sustentation F_y, par :

$$C_y = \frac{|F_y|}{\rho\, V_0^2\, a}$$

Exprimer C_y en fonction de I_s, e, a, R et U_1.

IV.10. On désire simuler dans la cuve rhéoélectrique un écoulement tel que $C_y = 1$. Donner la valeur de I_s pour $R = 100\ \Omega$, $e = 1\text{m}$, $a = 10$ cm et $U_1 = 10$ V.
Exprimer maintenant le coefficient C_y en fonction de la position angulaire θ_0 des points d'arrêt. Dans le cas où $C_y = 1$, calculer cet angle et représenter sommairement les lignes de courant.