

Les calculatrices sont autorisées. Les deux problèmes sont indépendants. On fera l'application numérique chaque fois que cela est possible. Le symbole SI désigne l'unité homogène à la grandeur physique considérée, dans le cadre du Système International d'unités.

N.B.: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLÈME I L'ASCENSEUR SPATIAL

L'ascenseur spatial appartient au domaine de la science-fiction. Le concept, imaginé en 1960 par l'ingénieur soviétique Youri N. Artsutanov, fut popularisé par le romancier anglais Arthur C. Clarke en 1979 ("The fountain of paradise"). L'idée consiste à envoyer un câble très résistant au dessus de l'équateur et à s'en servir pour lever des charges en direction de l'orbite terrestre, tel un ascenseur géant. Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects physiques d'une telle réalisation.

Données: Masse de la Terre $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg, rayon équatorial de la Terre $R_T = 6,38 \times 10^6$ m, constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ m³.s⁻².kg⁻¹, accélération de la pesanteur moyenne à la surface de la Terre (équateur) $g = 9,78$ m.s⁻¹, vitesse angulaire de rotation de la Terre par rapport aux étoiles lointaines $\Omega = 7,29 \times 10^{-5}$ rad.s⁻¹.

I.1 Mouvements orbitaux

La Terre est assimilée à un corps de symétrie sphérique. On néglige ici la masse et l'influence de la Lune, considérée comme un satellite léger. Les distances radiales r sont mesurées par rapport au centre de la Terre.

- **I.1.1** Trouver la valeur du champ de gravité G_0 régnant à la surface de la Terre en fonction de \mathcal{G} , M_T et R_T . On pourra appliquer, par exemple, le théorème de Gauss pour \vec{G}_0 à la surface de la Terre. Y a-t-il une différence entre G_0 et g ?
- **I.1.2** Rappeler la relation entre le rayon r de l'orbite circulaire d'un satellite et sa période τ de révolution. Exprimer ce rayon en fonction de G_0 .

Tournez la page S.V.P.

- **I.1.3** Calculer, en jours, la période de révolution de la Lune, en assimilant son orbite à un cercle de rayon 384 000 km.
- **I.1.4** Pour quelle distance R_{GS} un satellite est-il immobile dans le référentiel de la Terre \mathcal{R}_T ? Comment s'appelle cette orbite ?

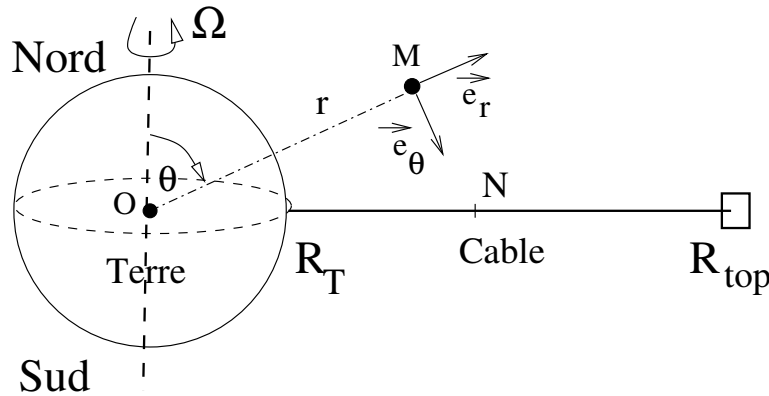


Figure 1

I.2 Equilibre du câble

Le câble de l'ascenseur (Figure 1) possède une masse par unité de longueur $\mu(r)$ qui peut éventuellement dépendre de l'altitude (dans le cas où la section du câble varie, ou si le câble est élastique). Le câble est positionné **exactement à la verticale de l'équateur**. On supposera qu'un équilibre stable du câble est possible, résultant d'un équilibre entre la force de gravité, la force d'inertie de rotation dans le référentiel Terrestre \mathcal{R}_T , et la force tensile $T(r)$ du câble.

- **I.2.1** Rappeler la différence entre le référentiel géocentrique \mathcal{R}_T^* et le référentiel Terrestre \mathcal{R}_T . Lequel des deux est le plus proche d'un référentiel Galiléen ?
- **I.2.2** Donner dans un repère de coordonnées sphériques (Figure 1), lié au référentiel \mathcal{R}_T , l'expression de la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_I(r, \theta)$ et de la force de gravité terrestre $\vec{F}_G(r)$ en fonction de la distance r d'un objet de masse m .
- **I.2.3** En tout point N d'altitude r , la partie supérieure du câble exerce sur la partie inférieure une force $\vec{T}(r) = T(r)\vec{e}_r$, où $T(r)$ est une fonction de signe positif, dont l'effet est de s'opposer à un allongement du câble. Montrer que l'équilibre du câble implique l'équation suivante:

$$T(r + dr) - T(r) + \mu(r)dr \left(r\Omega^2 - G_0 \frac{R_T^2}{r^2} \right) = 0$$

- **I.2.4** Le câble se termine à une altitude R_{top} supérieure à R_{GS} par une masse M_{top} . En supposant la masse linéique μ du câble **constante**, calculer la valeur de la tension $T(r)$ en fonction de M_{top} et R_{top} , pour toute valeur supérieure à $R_{base} = R_T = 6380$ km.
- **I.2.5** Montrer que si la masse M_{top} est trop faible, ou l'altitude R_{top} insuffisante, la tension $T(r)$ prendra une valeur négative. Cette valeur négative, synonyme de travail en compression, se traduirait vraisemblablement par un effondrement du câble. En déduire donc un critère de stabilité du câble de l'ascenseur. On s'appuiera sur l'étude des variations de la fonction $T(r)$.

- **I.2.6** Un câble de hauteur $R_{top} = 145\,000$ km est-il stable en l'absence de masse M_{top} ?

I.3 Masse et résistance du câble

Le câble possède un rayon r_c et une section $\mathcal{A} = \pi r_c^2$. On appelle contrainte Σ , la valeur de la force $T(r)$ par unité de section (m^2) du câble. La résistance d'un matériau homogène dépend de la valeur de Σ qui ne doit pas dépasser une valeur critique Σ_c propre à chaque matériau. L'application d'une contrainte supérieure à Σ_c entraîne une déformation non-élastique, irréversible du matériau, puis éventuellement ensuite sa rupture.

- **I.3.1** En quelle unité bien connue s'exprime Σ ?
- **I.3.2** Le matériau a une masse volumique ρ . Exprimer la masse linéique en fonction de ρ et \mathcal{A} puis de ρ et r_c .
- **I.3.3** On considère un câble, de section constante, dont la tension est toujours positive. Montrer que la tension du câble passe par un maximum. En déduire que l'équilibre du câble implique que le matériau doit résister à une contrainte au moins égale à Σ_{max} que l'on exprimera en fonction des données du problème. Comment le rayon du câble r_c influe-t-il sur la solidité de l'édifice ?
- **I.3.4** Les valeurs numériques de ρ et Σ_c sont respectivement:
 - * Acier : $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\Sigma_c \simeq 10^9 \text{ SI}$.
 - * Kevlar : $\rho = 1440 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\Sigma_c \simeq 3,6 \times 10^9 \text{ SI}$.

La résistance de l'acier et du kevlar vous semble-t-elle suffisante pour assurer la stabilité de l'édifice ? Le module de Young de l'acier est de 200 GPa et celui du kevlar de 35 GPa (1GPa = 10^9 Pa). Calculer dans chaque cas l'allongement relatif $\delta\ell/\ell$ qu'impliquerait un câble utilisant ces matériaux au voisinage de Σ_{max} .

- **I.3.5** Les espoirs actuels sont fondés sur les nanotubes de carbone, supposés résister à $\Sigma_{max} \simeq 100 \times 10^9 \text{ SI}$, pour une masse volumique d'environ 1300 kg.m^{-3} . Un câble spatial en nanotubes de carbone serait-il assez solide ?
- **I.3.6** Pour fabriquer un câble de **masse optimale**, il suffit de faire varier la section \mathcal{A} du câble avec la hauteur r de façon à ce que la résistance du câble soit juste suffisante pour supporter une tension $T(r)$. En faisant intervenir la contrainte critique Σ_c et la masse volumique ρ du matériau, montrer que la masse linéique $\mu(r)$ devient proportionnelle à la tension T .
- **I.3.7** Ecrire et résoudre l'équation différentielle de I.2.3 dans cette situation.
- **I.3.8** Tracer l'allure de la fonction $T(r)$ obtenue en fonction de r . $T(r)$ peut-elle devenir négative ? On estime que pour lever une charge de 10 tonnes, la tension du câble doit être au moins égale à 10^6 N , de sorte que la surcharge due à la masse supplémentaire ne dépasse pas 10% de T au sol. Calculer le rapport entre la tension maximale du câble et la tension du câble au niveau du sol dans le cas de l'acier et d'un câble en "nanotubes".