

Partie II - À propos des avalanches

II.A - Rôle des coefficients de frottement

Dans une avalanche, une masse de neige se détache sur une pente et la dévale en entraînant avec elle de la matière supplémentaire. Il en résulte une amplification qui conduit à un phénomène violent même à partir d'un déséquilibre faible.

II.A.1) On considère un bloc de neige de masse m reposant sur un plan incliné dont la pente est repérée par l'angle α (figure 2). Le contact entre la neige et ce plan, décrit par les lois de Coulomb sur le frottement, est caractérisé par des coefficients de frottement statique μ_s et dynamique μ_d . On rappelle que $\mu_d \leq \mu_s$. On note $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.

Montrer que l'équilibre est possible tant que $\alpha \leq \alpha_c$ et exprimer l'angle critique α_c .

II.A.2) La masse de neige en équilibre sur une pente d'angle α_c subit une légère perturbation qui lui donne une vitesse initiale $v_0 u_x$, $v_0 > 0$. Exprimer sa vitesse ultérieure $v(t)$ et son énergie cinétique $E_c(t)$.

II.A.3) L'énergie acquise sert en fait à mettre en mouvement de nouveaux blocs de neige, conduisant à l'amplification de l'avalanche. Les valeurs approximatives de μ_s et μ_d sont données dans le tableau ci-dessous pour différents types de neige. D'après la question précédente, quel type de neige conduit aux avalanches les plus violentes ? On justifiera la réponse.

type de neige :	μ_s	μ_d
neige fraîche	jusqu'à 10	0,3
neige en gobelets	1,2	0,7
neige à grains ronds	1,2	0,4

II.A.4) Animée d'une vitesse v_1 , la masse de neige arrive dans une région où l'angle α prend une valeur plus faible, constante. À quelle condition portant sur α le mouvement est-il ralenti puis stoppé ?

II.A.5) Expliquer comment l'observation de nombreuses avalanches permet de déduire des valeurs numériques pour μ_s et μ_d telles que celles données dans le tableau.

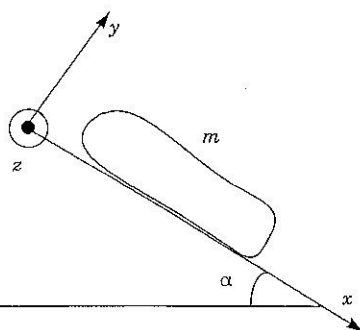


Figure 2 - Masse de neige reposant sur un plan incliné

PHYSIQUE I

Filière PC

II.B - Modèle de frottement sur sol rugueux

Lorsque l'avalanche rencontre dans sa course un sol rugueux, elle est soumise à de nouvelles forces de frottement dont on étudie ici une modélisation (figure 3).

La masse de neige en mouvement est assimilée à un parallélépipède rectangle d'épaisseur d (selon y), de longueur l (selon x) et de largeur L (selon z). Le contact avec le sol s'effectue donc sur un rectangle d'aire $S = Ll$.

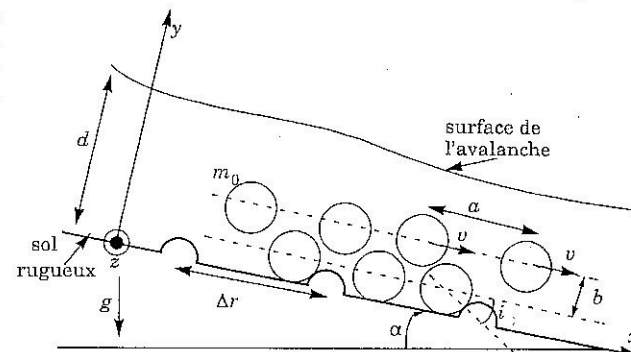


Figure 3. Modèle d'avalanche sur sol rugueux

L'avalanche est formée de paquets de neige sphériques de masse m_0 descendant la ligne de plus grande pente avec une vitesse $v = v u_x$. Ces blocs sont empilés en couches distantes de b perpendiculairement à la pente. Dans une couche donnée, parallèle au plan (Oxz) , les blocs sont en moyenne distants de a selon les directions x et z . Au niveau du sol, ils rencontrent des aspérités assimilées à des cylindres de section circulaire et d'axe parallèle à (Oz) , séparés d'une distance Δr . Ces chocs, caractérisés par l'angle d'incidence i fixé, sont supposés mous : après l'impact, le vecteur vitesse du bloc est tangent à la surface de l'aspérité cylindrique au point de contact.

D'autre part, la composante tangentielle de sa vitesse est conservée dans le choc.

II.B.1) Un bloc se déplaçant selon x avec une vitesse moyenne v , exprimer la fréquence f des chocs qu'il subit.

II.B.2) Quel est le nombre moyen N_1 de blocs dans la couche en contact avec le sol ?

II.B.3) Combien de chocs l'avalanche dans son ensemble subit-elle, pendant dt ? On notera dN ce nombre.

II.B.4) Pendant un choc, un bloc subit un changement de quantité de mouvement Δp_0 . Déterminer sa projection Δp_{0x} sur l'axe x .

II.B.5) Soit $P = P\mathbf{u}_x$ la quantité de mouvement de l'avalanche. En déduire la variation de quantité de mouvement dP_{chocs} causée par les chocs durant dt .

II.B.6) En déduire que la force de frottement rugueux s'exerçant sur l'avalanche est :

$$F_{\text{rug}} = -\frac{m_0 S v^2 \cos^2 i}{a^2 \Delta r} \mathbf{u}_x \quad (4)$$

II.B.7) Soit m la masse totale de l'avalanche. Montrer que F_{rug} se met sous la forme

$$F_{\text{rug}} = -\frac{mgv^2}{\xi d} \mathbf{u}_x \quad (5)$$

en donnant l'expression du paramètre de rugosité ξ en fonction de g , Δr , b et i .

II.B.8) Expliquer pourquoi ξ dépend de la nature du sol sur lequel l'avalanche s'écoule.

II.B.9) Certains paramètres du modèle pourraient dépendre de la vitesse, de sorte que ξ en dépendrait aussi. Lesquels selon vous ?

II.C - Dynamique de l'avalanche

L'avalanche de masse m et d'épaisseur d dévale désormais une pente d'angle α sous les effets conjugués de son poids, du frottement sec obéissant aux lois de Coulomb (partie II.A) et du frottement rugueux de la partie II.B décrit par la relation (5). On rappelle que

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{argth}\left(\frac{u}{a}\right) \quad \text{et} \quad \int \operatorname{th} u \, du = \ln(\operatorname{ch} u).$$

II.C.1) Déterminer l'équation du mouvement selon x sous la forme d'une équation différentielle pour $v(t)$.

II.C.2) Exprimer la vitesse limite v_l atteinte par l'avalanche et la calculer numériquement pour $\alpha = 35^\circ$, $\mu_d = 0,3$, $d = 2 \text{ m}$ et $\xi = 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

II.C.3) Comment l'énergie cinétique de l'avalanche varie-t-elle avec son épaisseur d , toutes choses égales par ailleurs ?

II.C.4) Exprimer l'évolution $v(t)$ de la vitesse de l'avalanche, avec la condition initiale $v(0) = 0$. On éliminera α et μ_d au profit de v_l .

II.C.5) Déterminer la distance $x(t)$ parcourue par l'avalanche depuis son point de départ.

II.C.6) *Application numérique* : quelle distance l'avalanche a-t-elle parcourue lorsque elle atteint sa vitesse limite à 10 % près

II.C.7) L'avalanche ayant atteint sa vitesse limite v_l rencontre un brusque changement de pente, dont l'angle avec l'horizontale passe d'une valeur α à une autre valeur α' . La vitesse limite va prendre, après une certaine distance de transition, une nouvelle valeur v'_l . On suppose que la largeur L de l'avalanche reste la même, l'épaisseur d pouvant par contre être modifiée. En admettant que le débit volumique de neige est le même de part et d'autre de ce changement de pente, démontrer la loi d'invariance :

$$\frac{v_l^3}{\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha} = \frac{v'_l{}^3}{\sin \alpha' - \mu_d \cos \alpha'} \quad (6)$$

v_l et v'_l désignant respectivement la vitesse de l'avalanche avant et après la rupture de pente.

II.C.8) *Application numérique* : l'angle α passe de 35° à 30° . De quel pourcentage la vitesse est-elle réduite ?