

MECANIQUE

Présentation générale

L'objet de ce problème est d'étudier divers aspects dynamiques du mouvement de la benne d'un téléphérique. Celui-ci est constitué d'un câble porteur sur lequel peut se déplacer un chariot (Ch) qui comporte deux roues identiques de centres C_1 et C_2 et qui roulent sur le câble.

Dans tout le problème le câble sera supposé être parfaitement horizontal (cf. figure 1):

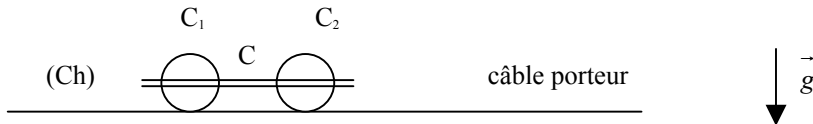


figure 1

Un bras (T) est articulé sur le chariot en C au milieu des centres C_1 et C_2 des roues.

La benne (B) est liée au point A situé à l'extrémité inférieure du bras.

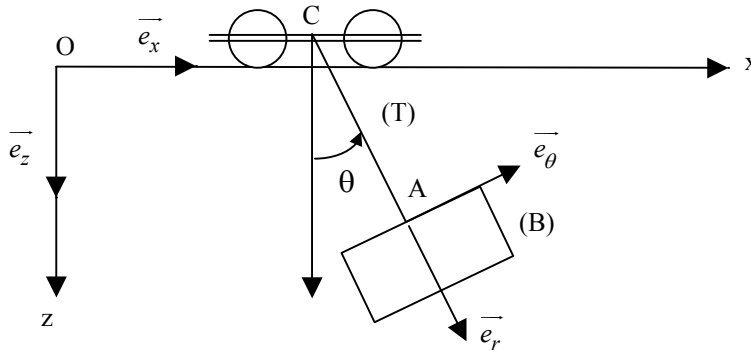


figure 2

Notations et valeurs numériques

Le chariot est de masse totale $m_C = 200 \text{ kg}$; les centres des roues sont séparés par la distance $d = 1 \text{ m}$.

Les roues ont une masse $m_r = 40 \text{ kg}$, un rayon $r = 20 \text{ cm}$ et un moment d'inertie par rapport à leur axe de rotation $J = m_r r^2 / 2$. L'ensemble est homogène, le centre de masse de l'ensemble est donc situé en C.

Le coefficient de frottement entre les roues et le câble est $f = 0,1$.

Le bras (T) est de masse $m_T = 300 \text{ kg}$ et de longueur $L = 3 \text{ m}$.

La benne (B) est homogène de masse $m_B = 2000 \text{ kg}$.

La masse de l'ensemble est donc $M = m_T + m_C + m_B$.

On désigne par a la distance entre C et G, G étant le centre de masse de l'ensemble (T) et (B). $a = 4,5 \text{ m}$.

Δ désigne l'axe de rotation de l'ensemble (T) et (B) passant par C et J_Δ son moment d'inertie par rapport à Δ .

Dans tout le problème le champ de pesanteur \vec{g} est supposé uniforme, de norme $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

Paramétrages

L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre R supposé galiléen auquel est associé un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z dirigé vers le bas, \vec{e}_x colinéaire au câble, O situé à l'extrémité gauche du câble.

La réaction du câble sur la roue n°i est désignée par $\vec{R}_i = \vec{T}_i + \vec{N}_i$ avec $\vec{T}_i = T_i \vec{e}_x$ et $\vec{N}_i = N_i \vec{e}_z$ (i=1 ou 2).

ω_i désigne la vitesse angulaire de la roue n°i.

On désigne par x l'abscisse de C et par θ l'angle entre \vec{e}_z et \vec{CA} . On pourra introduire une base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en A avec $\vec{e}_r = \frac{\vec{CA}}{L}$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = \pi/2$.

Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

I. Préliminaire

1. Rappeler le théorème du moment cinétique appliqué à un solide S en un point O fixe dans un référentiel galiléen R .
2. On se place dans un référentiel R' , d'origine A, en translation par rapport à R .
 - a) Donner l'expression de la force d'inertie subie par un point matériel M de masse m en fonction de l'accélération $\vec{a}(A)_{/R}$ de A dans R .
 - b) Donner l'expression du théorème du moment cinétique pour un solide S de masse m en O' fixe dans R' ; justifier l'existence d'un terme correspondant au moment en O' de la résultante des forces d'inertie $-m\vec{a}(A)_{/R}$ s'appliquant au centre de masse G du solide.
 - c) Si R' est le référentiel barycentrique, quel résultat retrouve-t-on ?

II. Oscillations de la benne

1. On effectue un essai d'oscillation de la benne, le chariot étant maintenu immobile dans R .
 - a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ .
 - b) Dans le cas des petites oscillations, on mesure une période $T_i = 4,6$ s. En déduire la valeur de J_Δ .
 - c) Sachant que le bras (T) a un moment d'inertie par rapport à Δ , $J_{T\Delta} = m_T L^2 / 3$, déduire la valeur de $J_{B\Delta}$, moment d'inertie de (B) par rapport à Δ .
2. Le chariot est mis en mouvement par un câble tracteur qui exerce une force de traction appliquée en C, $\vec{T} = T_0 \vec{e}_x$. Les roues roulent sans glisser sur le câble.

- a) Appliquer le théorème du moment cinétique à la roue 1 dans son référentiel barycentrique et en déduire une relation entre $\frac{d^2x}{dt^2}$ et T_1 . Quelle relation similaire obtient-on avec la roue 2 ? En déduire la relation entre T_1 et T_2 .
- b) Montrer que l'accélération du centre de masse G' de l'ensemble (Ch), (T), (B) dans le référentiel R , se met sous la forme $\vec{a}(G') = A_1 \cdot \vec{e}_r + A_2 \cdot \vec{e}_\theta + \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x$ où A_1 et A_2 sont des expressions que l'on explicitera.
- c) Appliquer le théorème de la résultante cinétique à l'ensemble (Ch), (T) et (B) dans R et projeter sur l'axe Ox pour obtenir une équation (1) faisant intervenir T_0 .
- d) Montrer que dans le cas des petites oscillations, les termes quadratiques en θ et $\frac{d\theta}{dt}$ étant négligés, l'équation (1) devient

$$K_1 \frac{d^2x}{dt^2} + (m_T + m_B) a \frac{d^2\theta}{dt^2} = T_0 \quad (2)$$
où K_1 est un coefficient que l'on explicitera.
- e) On se place dans le référentiel R' , d'origine C en translation par rapport à R . Appliquer le théorème du moment cinétique à l'ensemble (T) et (B) pour obtenir, dans le cas des petites oscillations, une équation (3).
Montrer que (3) se met sous la forme $\frac{d^2\theta}{dt^2} + K_2 \left(g\theta + \frac{d^2x}{dt^2} \right) = 0$ où K_2 est un coefficient que l'on explicitera.
- f) Déduire des équations (2) et (3) une équation différentielle linéaire en $\theta(t)$. Quelle est la pulsation des petites oscillations ?
Calculer la valeur numérique de la période. Conclure dans le cas où la benne est destinée au transport des passagers.
- g) On souhaite donner à la benne une accélération $\gamma_0 = 0,8 \text{ ms}^{-2}$. Pour cela, à l'instant $t = 0$, on fait passer la tension d'une valeur nulle à la valeur $T_0 = K_1 \gamma_0$. Initialement la benne est au repos ; déterminer $\theta(t)$ pour t positif.
Calculer en degré l'amplitude des oscillations.

3. Condition de non glissement.

Dans ce paragraphe on considère que $\theta = 0$. La force de traction est maintenue.

- a) Déterminer le moment cinétique de l'ensemble du chariot par rapport à l'axe Δ .
- b) En déduire une relation liant les composantes des réactions du câble sur les roues, l'accélération angulaire des roues et les caractéristiques du chariot.
- c) Déterminer une autre relation ne portant que sur les composantes normales des réactions.
- d) Dans le cas où le chariot a une accélération $\gamma_0 = 0,8 \text{ m.s}^{-2}$, déterminer s'il y a glissement ou non.