

## UNE BICYCLETTE

(Extrait ENS Cachan 90 )

Ce problème étudie les mouvements de trois systèmes matériels et permet d'expliquer le rôle des roues d'une bicyclette.

### 1. Calculs d'énergie cinétique

Exprimer l'énergie cinétique des trois systèmes matériels suivants:

1. Le système  $S_1$  est un solide en translation de masse  $M$  et de vitesse  $v$ .
2. Le système  $S_2$  est un cercle de rayon  $R$ , de masse  $m$  uniformément répartie sur le cercle. Ce cercle est animé d'une vitesse angulaire  $\omega$  autour de son axe de révolution  $(D)$ , cet axe  $(D)$  possède la vitesse  $v$  parallèle au plan du cercle.
3. Le système  $S_3$  est une bicyclette. L'ensemble cadre + cycliste de masse  $M$  est en translation de vitesse  $v$ . Chacune des roues de rayon  $R$ , de masse  $m$  est modélisable par le système  $S_2$  et possède la vitesse angulaire  $\omega$ .

### II. Mouvements sur un plan horizontal

1. Le système  $S_1$  repose sur le sol, le contact étant caractérisé par le coefficient de frottement de glissement  $f$ .  $S_1$  en mouvement de translation, a pour vitesse initiale  $v_0$ . Etablir la loi  $v = f(t)$  de la vitesse  $v$  en fonction du temps  $t$ . Représentation graphique.
2. Le système  $S_2$  roule sans glisser sur le plan horizontal, le contact étant caractérisé par le même coefficient de frottement de glissement  $f$ . La vitesse initiale du centre d'inertie est  $v_0$ . Etablir la loi  $v = g(t)$  de la vitesse  $v$  en fonction du temps  $t$ . Représentation graphique.
3. Le système  $S_3$  possède un mouvement dans lequel le mouvement des roues est un roulement sans glissement. L'ensemble cadre + cycliste possède la vitesse initiale  $v_0$ , le cycliste ne pédale pas et ne freine pas. Etablir la loi  $v = h(t)$  de la vitesse  $v$  en fonction du temps  $t$ . Représentation graphique.

### III. Mouvements suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné (P)

Soit  $\beta$  l'angle formé par le plan horizontal et le plan (P). Soit  $f$  le coefficient de frottement de glissement.

1. Le système  $S_1$  initialement au repos est susceptible d'acquies un mouvement de translation, suivant la ligne de plus grande pente de (P).

a. Calculer, dans cette hypothèse, l'accélération  $a_G$  de son centre d'inertie.

b. Montrer que le mouvement se produit pour des valeurs de  $\beta$  supérieures à une valeur limite  $\beta_0$ .

2. On considère le système  $S_2$  lâché sans vitesse initiale.

a. La circonférence roule sans glisser. Calculer l'accélération  $a_G$  de son centre d'inertie.

b. Quel est l'intervalle  $[\beta_1, \beta_2]$  des valeurs de  $\beta$  pour lequel le roulement sans glissement est possible ? Pour  $\beta > \beta_2$ , il y a glissement de la circonférence sur le sol.

c. Calculer  $a_G$  pour  $\beta > \beta_2$ .

3. On considère le système  $S_3$ .

a. La bicyclette roule sans glisser, sur les deux roues. Calculer  $a_G$ .

b. La bicyclette roule avec glissement sur les deux roues. Calculer  $a_G$ .

c. Le roulement sans glissement a lieu pour des valeurs de  $\beta$  inférieures à une valeur notée  $\beta_3$ .

On admet que pour  $\beta > \beta_3$ , le glissement se produit simultanément sur les deux roues, et que les composantes tangentielles des réactions du plan (P) sur les deux roues sont égales. Calculer  $\beta_3$ .

### IV. Conclusion

1. Représenter sur un même graphique les trois fonctions  $a_G(\beta)$  pour chacun des trois systèmes matériels,  $\beta$  variant de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

2. En déduire le rôle du rapport  $\frac{2m}{M}$  pour une valeur de  $\beta$  donnée.