Deuxième problème — MÉCANIQUE

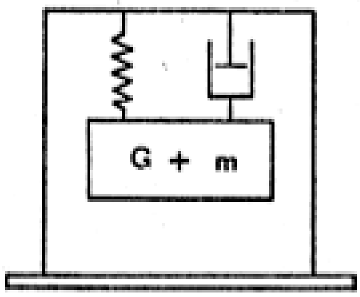

Figure 1

Un ensemble appelé « capteur » comprend un support et une masse m reliés par un ressort et un amortisseur disposés en parallèle (fig. 1).

La masse, de centre d'inertie G, ne peut se déplacer que verticalement. Le support, le ressort et l'amortisseur ont une masse négligeable. L'intensité de la pesanteur est g.

Le ressort a une longueur l à l'état naturel et une rigidité k, exprimée en Newton par mètre. La constante de l'amortisseur est f.

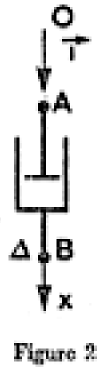

Figure 2

On précise que si les extrémités A et B d'un amortisseur appartenant à un système mécanique, décrivent un axe Δ avec des vitesses respectives $\frac{dx_A}{dt}$ et $\frac{dx_B}{dt}$ (fig. 2), l'amortisseur exerce, sur le reste du système, en A une force $f\left(\frac{dx_B}{dt} - \frac{dx_A}{dt}\right)\vec{i}$ et en B une force $f\left(\frac{dx_A}{dt} - \frac{dx_B}{dt}\right)\vec{i}$, $\vec{i}$ étant le vecteur unitaire de l'axe Δ.

Tournez la page S. V. P.

I

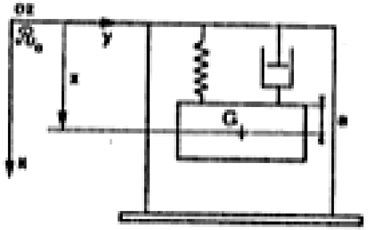

Figure 3

Le support est immobile par rapport à un repère Galiléen $\mathcal{R}_0$ (fig. 3).

I.1. Calculer l'abscisse x_e du centre d'inertie de la masse en équilibre.

I.2. Écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse, écartée de sa position d'équilibre.

I.3. Que devient cette équation quand on pose $x = x_e + X$?

I.4. On pose : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\quad \frac{f}{f_c} = \xi$ avec $f_c^2 = 4\,km$.

Montrer que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha\frac{dX}{dt} + \beta X = 0$$

Calculer α et β en fonction de ξ et ω_0.

I.5. On donne :

$$\xi = 0{,}5 \qquad \omega_0 = 10 \text{ rd/S}.$$

A l'instant initial, on a $X = 1$ cm $\quad \frac{dX}{dt} = 0$.

Déterminer X pour $t = 0{,}2$ S.

II

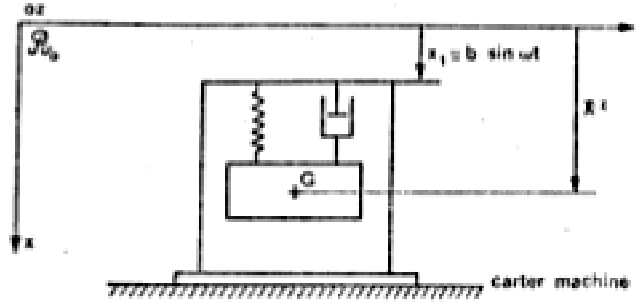

Figure 4

On suppose maintenant que le support est solidaire du carter d'une machine animé d'un mouvement sinusoïdal vertical $x_1 = b \sin \omega t$ par rapport à un repère Galiléen $\mathcal{R}_0$ (fig. 4). On suppose que b est positif.

II.1. Écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse par rapport à $\mathcal{R}_0$.

II.2. Montrer que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha\frac{dX}{dt} + \beta X = H \sin \omega t$ en posant $x = X + C + b \sin \omega t$. Déterminer H et la constante C. Que représente X?

II.3. Étudier la vibration forcée, solution particulière de l'équation complète, $X = B \sin(\omega t - \Phi)$ avec $B > 0$.

Calculer $\frac{B}{b}$ et $\operatorname{tg} \Phi$ à l'aide de ξ et $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

II.4. On suppose que $\xi = 0{,}5$. Tracer le graphe de $\frac{B}{b}$ en fonction de u. Montrer que si u est supérieur à une certaine valeur u_1, $\frac{B}{b} - 1$ est inférieur à 10^{-2}.

Calculer u_1. En déduire une condition pour que l'appareil puisse fonctionner en capteur d'amplitude.