PROBLÈME II
GAIN DE TEMPS ET ÉCONOMIES D'ÉNERGIE

Le temps et l'énergie sont des biens précieux dont il faut savoir faire le meilleur usage, notamment dans le cadre de l'habitat. Il convient en particulier de réduire le délai de mise en température d'un logement et de limiter la consommation nécessaire à son chauffage. Quelques procédés en ce sens sont présentés dans ce problème, sous forme de questions indépendantes.

1) Approche simplifiée du comportement thermique d'un habitat ; optimisation du temps de mise en température.

1.1) Modélisation sommaire

1.1.1) Dans un réseau électrique la notion de résistance électrique R traduit une relation de proportionnalité entre la différence de potentiel ΔV existant entre deux ensembles équipotentiels et le courant I qui circule de l'un à l'autre. Par analogie, dans un réseau thermique, définir la notion de résistance thermique R_{th} en fonction de la différence de température $\Delta\theta$ existant entre deux ensembles isothermes et le flux thermique Φ qui circule de l'un à l'autre. Préciser les unités des grandeurs thermiques utilisées.

1.1.2) Dans un réseau électrique, la notion de capacité électrique C traduit une relation de proportionnalité entre la dérivée temporelle dV/dt et le courant I lié à la modification de la charge d'un condensateur dont l'une des armatures est fixée au potentiel V et l'autre est maintenue à un potentiel de référence nul. Par analogie, dans un réseau thermique, définir la notion de capacité thermique C_{th} en fonction de la dérivée temporelle $d\theta/dt$ et du flux thermique Φ lié à la modification de l'enthalpie d'un objet matériel porté à la température θ , la mesure de l'enthalpie étant référencée à un niveau de température nulle. Préciser les unités des grandeurs thermiques utilisées.

1.1.3) Le schéma électrique proposé (Figure 1) est l'image d'un système thermique élémentaire qui permet de fixer globalement les idées concernant le comportement thermique d'un habitat.
L'ensemble des radiateurs, alimentés par la chaudière, est assimilé à une source de courant.
Pour simplifier, *dans toutes les questions qui suivent, la température extérieure* θ_e *sera toujours supposée stationnaire* ; ainsi le milieu extérieur sera assimilé à une source de tension continue.
La température $\theta(t)$ de l'habitat sera supposée uniforme dans tout son volume et la capacité thermique de celui-ci sera réduite à C_{th} .
Entre l'habitat et l'extérieur est représentée la résistance thermique R_{th} de l'isolation.
La référence de température sera prise ici égale à 0°C ; par analogie avec une référence de potentiel nul, on pourra la représenter par le symbole d'une "masse" dans un réseau électrique.
a) Quelle loi de Kirchhoff appliquée au *réseau électrique*, traduit-elle le bilan thermique de l'habitat ainsi représenté ? Exprimer ce bilan.
b) Lorsque le régime permanent est atteint pour une température de consigne constante θ_C , expliquer pourquoi l'on peut faire abstraction de la capacité C_{th} .
- En déduire directement, en fonction de θ_e , θ_C et R_{th} exclusivement, la puissance (flux) thermique Φ_o nécessaire au maintien de la température de consigne.
- En préciser la valeur numérique, sachant que : $\theta_e = 5°C$, $\theta_C = 20°C$ et $R_{th} = 2{,}5$ mK/W.

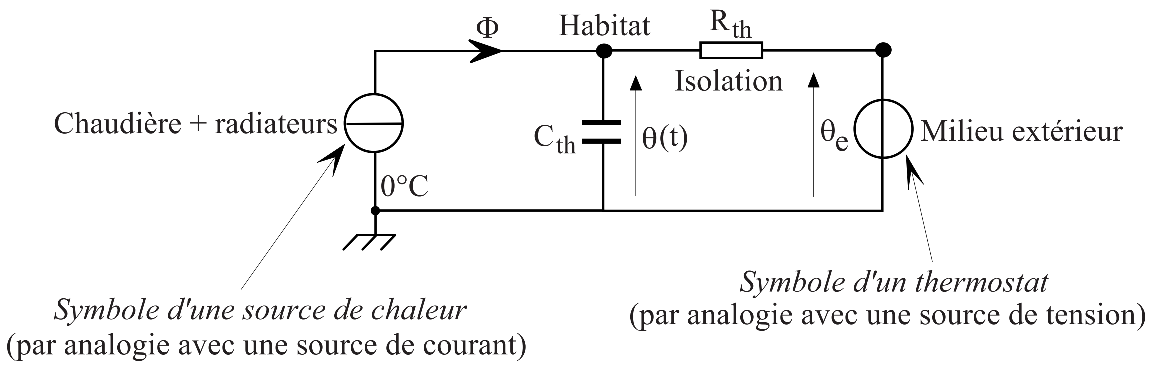

Figure 1

1.2) Mise en température

NB : Dans toute la suite de cette question on posera : $\tau_o = R_{th}\, C_{th}$

1.2.1) *Mise en température sous flux constant*

La température initiale de l'habitat étant supposée égale à la température extérieure, on met celui-ci en chauffe au temps $t = 0$ s , en imposant un échelon de flux égal à Φ_o .

a) Résoudre l'équation différentielle qui résulte du bilan thermique.

b) Sachant que $C_{th} =$ 3 MJ/K , calculer le temps nécessaire pour atteindre la température θ_C à 5 % près, c'est-à-dire lorsque : $\dfrac{\theta_C - \theta(t)}{\theta_C - \theta_e} = 5\,\%$.

Ce temps pouvant être jugé trop important, on peut accélérer la mise en température en augmentant la puissance de chauffe au démarrage puis en la réduisant progressivement de manière à ne jamais dépasser la consigne choisie. *Ceci est rendu aisé grâce aux progrès de l'électronique numérique qui permettent la programmation des sources de chaleur (sources électriques notamment) de manière à faire évoluer leur puissance selon des lois dépendant du temps et de divers paramètres fixés (consignes) ou variables (températures existantes).*

Deux procédés distincts sont proposés ci-après, en (1.2.2) et (1.2.3).

1.2.2) *Chauffage forcé au départ puis réduit en fonction du temps*

Dans la mesure où la chaudière est apte à fournir, par exemple, une puissance transitoire dix fois supérieure au flux Φ_o qui s'impose en régime établi, on peut programmer une puissance de chauffe selon la loi : $\Phi_1(t) = \Phi_o\left(1 + 9\, e^{-t/\tau}\right)$, laquelle tend vers la valeur nominale Φ_o au bout d'un temps déterminé.

a) Ecrire l'équation différentielle qui résulte du bilan thermique.

b) Sachant que la solution générale de cette équation est : $\theta(t) = \theta_C + \dfrac{9\,(\theta_C - \theta_e)}{1 - \dfrac{\tau_o}{\tau}}\, e^{-t/\tau} + A\, e^{-t/\tau_o}$

déterminer la constante d'intégration A dans les mêmes conditions initiales que précédemment.

c) Montrer que l'on peut choisir pour le paramètre τ une valeur particulière qui permet d'annuler cette constante. Dans ce cas, conclure quant à la loi $\theta(t)$ qui régit la mise en température et préciser le temps maintenant nécessaire pour atteindre la température θ_C à 5 % près.

Les méthodes développées précédemment en (1.2.1) *et* (1.2.2) *nécessitent le réglage du flux* Φ_o *qui dépend de la résistance thermique de l'isolation (laquelle peut évoluer en fonction des ouvertures « jour-nuit ») et des conditions extérieures.*
Le procédé présenté ci-après en (1.2.3) *permet d'ignorer ces deux données grâce au suivi de la température intérieure* $\theta(t)$ *de l'habitat.*

1.2.3) *Chauffage évolutif en fonction de la température intérieure atteinte*
La puissance (Φ_2) du chauffage est programmée de telle sorte que :

$$\Phi_2(t) = k[\theta_C - \theta(t)] + k' \int_0^t [\theta_C - \theta(u)]\,du \quad , \quad k \text{ et } k' \text{ étant des constantes positives.}$$

a) Ecrire l'équation intégro-différentielle qui résulte du bilan thermique puis, en la dérivant membre à membre par rapport au temps, déterminer l'équation différentielle qui s'en déduit.
Montrer qu'en régime établi, la température de l'habitat est toujours exactement égale à la consigne, quelles que soient R_{th} et θ_e.

b) L'équation différentielle obtenue étant du "second ordre à coefficients constants", elle admet des solutions de type $exp(r\,t)$; déterminer la relation reliant k et k' afin d'atteindre l'équilibre souhaité avec l'accroissement le plus rapide possible mais sans oscillations, c'est-à-dire propre au régime critique. Préciser la valeur du paramètre r correspondant en fonction de k, R_{th} et τ_o.
Quelles valeurs doit-on donner aux paramètres k et k' si l'on souhaite avoir un amortissement tel que : $\tau' = -1/r = \tau_o/10$?

c) La solution correspondante est de la forme $\theta(t) = \theta_C + (A' + A''t)e^{r\,t}$. Déterminer les constantes d'intégration A' et A'' en supposant que la température initiale de l'habitat est égale à la température extérieure et en explicitant l'expression initiale du flux de chauffage $\Phi_2(t=0)$, laquelle permet de déterminer $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0}$.

2) Economies d'énergie
2.1) Economie sur le chauffage de l'air neuf d'un logement
2.1.1) *Déperditions dues au renouvellement de l'air vicié par appel direct d'air neuf*
Afin d'assurer une bonne aération dans un logement, on admettait, avant qu'une réglementation plus contraignante ne soit imposée, que l'air devait être renouvelé en l'espace d'une heure. Calculer, dans cette hypothèse, la puissance thermique ainsi perdue par une maison individuelle de 300 m^3 rejetant un air vicié à $\theta_i = 20°C$ pour le remplacer par un air directement introduit de l'extérieur à la température $\theta_e = 5°C$.
Rappel : lorsqu'une masse dm d'air, dont la chaleur massique à pression constante est c_p, transite pendant le temps dt d'une position (i) en laquelle elle avait la température θ_i à une autre position donnée (j), elle déplace avec elle, de (i) vers (j) l'enthalpie qu'elle avait en (i), c'est-à-dire :
$dH_i = (dm)\, c_p\, \theta_i$, enthalpie ici définie par référence au $0°C$.

La puissance instantanée correspondante $\Phi_i = \frac{dm}{dt} c_p \theta_i$ peut s'exprimer en fonction du paramètre $G = \frac{dm}{dt} c_p$ dénommé conductance fluide, soit : $\Phi_i = G \theta_i$.

Compte tenu des propriétés de l'air, dans les conditions de température et de pression propre à l'habitat, on retient en pratique que $G = 0{,}34\, \mathcal{D}$, le débit volumique $\mathcal{D}$ étant exprimé en m^3/h pour obtenir la conductance fluide G en W/K .

Lorsque l'air qui quitte l'intérieur (i) de l'habitat est remplacé, avec le même débit et en régime permanent, par de l'air en provenance de l'extérieur (e) où il avait la température θ_e , la puissance nette évacuée (flux net) en position (i) est égale à la différence : $\Phi_{net} = \Phi_i - \Phi_e = G(\theta_i - \theta_e)$.

Préciser la valeur numérique de ce flux net dans les conditions indiquées.

2.1.2) *Récupération de chaleur sur l'air extrait avec un échangeur à contre-courant*

Un procédé économique consiste à réchauffer l'air neuf entrant en lui communiquant, sans mélange d'air, une partie de la chaleur de l'air sortant, grâce à deux conduites séparées, accolées sur une grande longueur L , en étroit contact thermique, mais isolées de l'extérieur (Figure 2) .

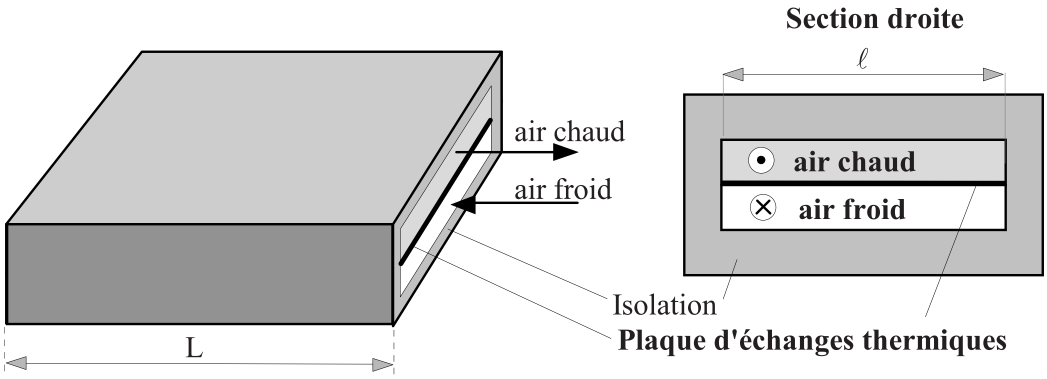

Figure 2

La paroi qui sépare les deux conduites est très fine, en cuivre, pour permettre un bon échange transversal. Le transfert par conduction longitudinale dans cette paroi peut être négligé devant celui correspondant aux flux déplacés par les mouvements d'air.

Pour modéliser les échanges qui se produisent au niveau d'une portion de conduite de longueur dx , située à l'abscisse x, on peut considérer qu'entre l'air chaud à la température $\theta_c(x)$ et l'air froid à la température $\theta_f(x)$, existe une *résistance thermique* $1/(g\, dx)$ transversale (Figure 4).

Cependant, pour modéliser les flux de chaleur transférés par circulation de fluide, il faut prendre garde au fait qu'ils ne dépendent que de la température en amont du mouvement et non pas de la différence de température entre le point de départ et le point d'arrivée. Ainsi, entre deux points de températures respectives $\theta(x)$ et $\theta(x+dx)$, le transfert de chaleur par circulation de fluide ne peut plus être symbolisé par une résistance thermique.

Si, par exemple, le fluide circule dans le sens positif de l'axe Ox, nous conviendrons de représenter ce transfert par le symbole graphique ci-après (Figure 3) emprunté, par analogie, à la représentation d'une source de courant liée :

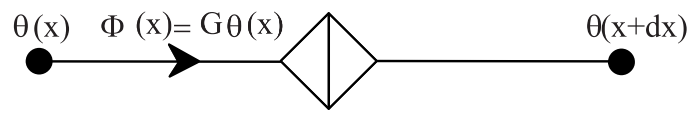

Figure 3

Ce symbolisme est reporté sur la figure 4 pour représenter les transferts par circulation de l'air chaud dans le sens positif de l'axe et par circulation de l'air froid en sens inverse.

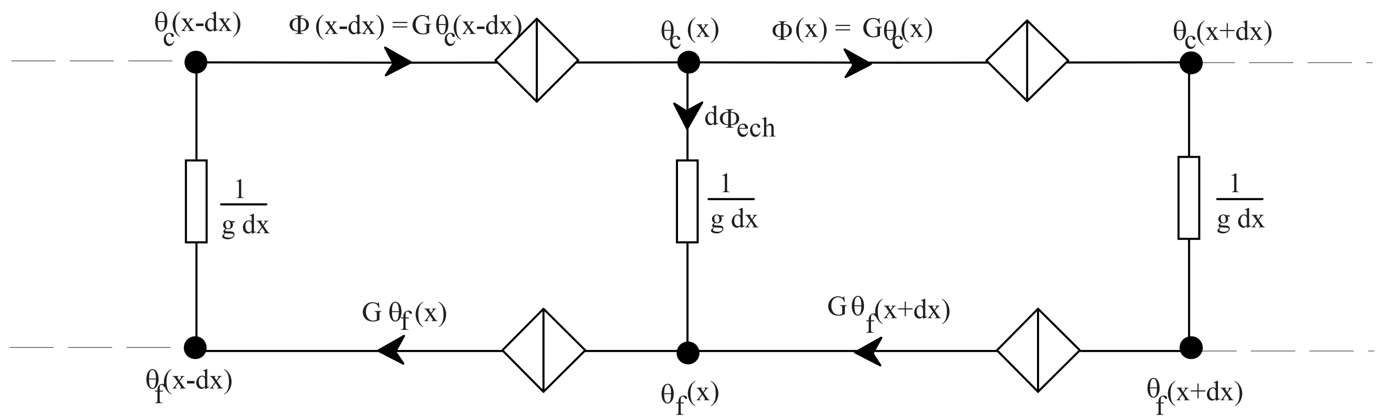

Figure 4

a) Exprimer le flux $d\Phi_{ech}$ échangé à l'abscisse x (depuis le point chaud jusqu'au point froid) en fonction des températures $\theta_c(x)$, $\theta_f(x)$ et de la conductance $g\,dx$.

b) Exprimer ce même flux $d\Phi_{ech}$ en fonction de G, $\theta_c(x\text{-}dx)$ et $\theta_c(x)$.

c) Exprimer ce même flux $d\Phi_{ech}$ en fonction de G, $\theta_f(x+dx)$ et $\theta_f(x)$.

d) En utilisant un développement de Taylor limité au premier ordre, écrire les équations différentielles qui régissent le comportement des températures $\theta_c(x)$ et $\theta_f(x)$ le long de la canalisation.

Montrer alors que les dérivées secondes de $\theta_c(x)$ et $\theta_f(x)$ sont égales à zéro.

Déterminer complètement l'évolution des deux températures en fonction de x, sachant que :

$L = 15$ m , $\theta_c(x=0) = 20°C$, $\theta_f(x=L) = 5°C$, $\mathcal{D} = 300\ m^3/h$ et $g = 9{,}2\ WK^{-1}m^{-1}$.

e) Calculer la température d'entrée de l'air froid à l'abscisse $x = 0$, puis le flux net dépensé pour la seule aération de la maison (abstraction faite du chauffage des murs, meubles et cloisons).