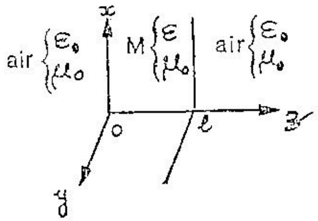
PHYSIQUE

PREMIER PROBLEME

EFFET FARADAY

Soit un milieu M, transparent, linéaire, homogène, et isotrope, de perméabilité magnétique μ_0, de permittivité diélectrique ε, rapporté à un trièdre trirectangle (O, x, y, z), limité par les plans $z = 0$ et $z = l$ (schéma ci-dessous). Il contient N électrons dispersifs par unité de volume. Une onde optique, plane, monochromatique, de pulsation ω pénètre dans le milieu M en $z = 0$, avec un vecteur d'onde $\vec{k}$ dirigé suivant Oz.



I

1° Que vaut le rapport du champ électrique à l'induction magnétique de l'onde?

On désignera par c_0 la vitesse de la lumière dans le milieu M.

2° Le milieu se polarise sous l'influence du champ électromagnétique de l'onde que l'on assimilera au champ local. Si ε_0 est la permittivité diélectrique du vide on pose $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ $\vec{P}$ étant le vecteur polarisation par unité de volume et χ la susceptibilité diélectrique, calculer l'indice du milieu en fonction de $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ puis en fonction de χ.

Exprimer également l'indice en fonction du module du vecteur d'onde, de la pulsation ω et de c vitesse de la lumière dans le vide.

II

Dans toute la suite du problème le milieu M est soumis à une induction magnétique statique de module constant B_0 dirigé suivant Oz. On s'intéresse à l'action du milieu M soumis à l'induction B_0 sur une onde dont le champ électrique E a pour composantes :

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - k_+ z)$$
$$E_y = E_0 \sin(\omega t - k_+ z)$$
$$E_z = 0$$

k_+ désignant le module du vecteur d'onde.

1° Quelle est la polarisation d'une telle onde?

Quelle est la direction du champ électrique à l'instant initial, à l'entrée du milieu?

2° Un électron dispersif en l'absence d'onde et d'induction statique vibre autour d'une position d'équilibre avec une pulsation caractéristique ω_0. Si s désigne le vecteur déplacement de l'électron on a :

$$\frac{d^2\vec{s}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{s} = 0.$$

Quelle est la force de Lorentz totale en présence de l'onde et de l'induction statique, agissante sur un électron dispersif ?

Montrer que l'on peut négliger la force magnétique de l'onde devant la force électrique, l'électron ayant une vitesse v faible devant c_0.

Montrer que le mouvement de l'électron suivant Oz n'est pas perturbé.

En cherchant $\vec{s}_+$, projection du vecteur $\vec{s}$ dans le plan xy, sous la même forme que $\vec{E}$, en désignant par s_0 le module de $\vec{s}_+$, montrer que

$$s_0 = \frac{-\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\Omega}$$

où l'on posera $\Omega = \frac{e B_0}{m}$, m étant la masse de l'électron.

En déduire le vecteur polarisation $\vec{P}_+$ puis la susceptibilité χ_+. Montrer que l'indice n_+ de propagation s'écrit

$$n_+^2 = 1 + \frac{\frac{N e^2}{m \varepsilon_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega\Omega}$$

A quelles conditions sur ω l'indice est-il réel ? On posera $\omega_0'^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} + \omega_0^2$.

Comment la propagation de l'onde est-elle modifiée par la présence de l'induction B_0 ?

Dans quelles conditions le milieu est-il dispersif ? absorbant ?

III

Dans la suite on supposera les indices n_+ et n_- réels.

L'onde qui incide sur le milieu M a maintenant un champ électrique E dont les composantes sont

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - k_- z)$$
$$E_y = -E_0 \sin(\omega t - k_- z)$$
$$E_z = 0$$

1° Comparer les polarisations de l'onde précédente et de cette nouvelle onde. En raisonnant comme dans le paragraphe II, calculer l'indice du milieu n_- pour cette nouvelle onde.

2° En supposant Ω faible devant ω et ω_0 et en posant $n_0 = \frac{1}{2}(n_+ + n_-)$ montrer que (avec $\omega \neq \omega_0$)

$$n_- - n_+ = \frac{N e^2 \omega\Omega}{n_0 m \varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

3° En fait, l'onde à l'entrée de M est une onde plane monochromatique polarisée rectilignement suivant Ox, dont le module du champ électrique est égal à $2 E_0$.

a. Calculer les composantes du champ électrique pour $0 \leqslant z \leqslant l$.

b. Montrer que l'onde reste polarisée rectilignement.

c. Montrer que la direction de polarisation tourne quand z varie de 0 à l.

d. Montrer que l'angle θ de la rotation à la sortie du milieu peut s'écrire $\theta = V l B_0$ où V est une constante (constante de Verdet) que l'on exprimera en fonction de n_+ et de n_-.

e. Caractériser le sens de la rotation de la polarisation par rapport à l'induction B_0.

f. Comment choisir la longueur d'onde de l'onde incidente pour augmenter l'angle θ ?

g. Si le champ magnétique était créé par un solénoïde comment se modifierait le phénomène précédent par inversion du sens du courant dans le solénoïde.

h. Prévoir qualitativement le phénomène observé lorsque l'induction statique possède une composante B_0 suivant Oz et une composante B'_0 suivant la direction Ox.

IV

L'onde à l'entrée étant l'onde polarisée rectilignement suivant Ox, on place en $z = l$ un miroir métallique, plan, parfait.

1° Quelle est la structure de l'onde réfléchie?

2° Quelle est la rotation totale du plan de polarisation entre les deux passages de l'onde en $z = 0$.

3° Qu'y a-t-il de changé lorsque le miroir métallique est remplacé par une glace diélectrique d'indice n' plus grand que n_0.

ENSET 1975 (Effet Faraday) (1)

I) 1°) $\vec E = \vec E_0 \, e^{i(\omega t - kz)}$ $\quad \vec k = k\vec u_z$

$\vec{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} \Rightarrow -i\vec k\wedge\vec E = -i\omega\vec B \Rightarrow \vec B = \frac{\vec k}{\omega}\wedge\vec E$ et $\Delta\vec E - \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{\partial^2\vec E}{\partial t^2} = \vec 0$

donc $k^2 = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r \times \omega^2 \Rightarrow c_0^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = (\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r)^{-1}$ et $\boxed{\|\vec B\| = \frac{\|\vec E\|}{c_0}}$

2°) soit c la vitesse de la lumière dans le vide : $\frac{c_0}{c} = \frac{1}{n}$ or $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

donc $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1+\chi}}$ donc $\boxed{k = \frac{n\omega}{c}}$

II) 1°) $\vec E \left| \begin{array}{l} E_x = E_0\cos(\omega t - k_+ z) \\ E_y = E_0\sin(\omega t - k_+ z) \\ E_z = 0 \end{array} \right)$ onde polarisée circulairement gauche.

$t = 0,\ z = 0 \quad \vec E_{(0,0)} = E_0\,\vec u_x$

2°) $\vec f = -e\left(\vec E + \vec v\wedge(\vec B + \vec B_0)\right)$ $\quad \|\vec v\| \ll c_0$ or $\|\vec B\| = \frac{\|\vec E\|}{c_0}$ donc $\frac{vB}{c_0} \ll E$

$\vec f \simeq -e\left(\vec E + \vec v\wedge\vec B_0\right)$ $\quad \vec B_0 = B_0\vec u_z$ donc ce champ n'introduit pas de composante selon $\vec u_z$ pour la force : $\underline{\vec f_z = -e\vec E}$ donc pas de perturbation du mouvement suivant Oz.

soit $\vec s_+ = s_{+x}\vec u_x + s_{+y}\vec u_y$ avec $s_{+x} = s_0\cos(\omega t - k_+ z)$; $s_{+y} = s_0\sin(\omega t - k_+ z)$

l'équation du mouvement est : $\frac{d^2\vec s_+}{dt^2} = -\omega_0^2\vec s_+ - \frac{e}{m}\vec E - \frac{e}{m}\dot{\vec s}_+\wedge\vec B_0$

$\dot{\vec s}_+\wedge\vec B_0 = \left(-\omega s_0\sin(\omega t - k_+ z)\vec u_x + s_0\omega\cos(\omega t - k_+ z)\vec u_y\right)\wedge B_0\vec u_z$

$\dot{\vec s}_+\wedge\vec B_0 = \omega s_0\sin(\omega t - k_+ z)B_0\vec u_y + s_0\omega\cos(\omega t - k_+ z)B_0\vec u_x$

sur Ox : $-\omega^2 s_0\cos(\omega t - k_+ z) = -\omega_0^2 s_0\cos(\omega t - k_+ z) - \frac{e}{m}E_0\cos(\omega t - k_+ z) - \frac{e s_0\omega B_0}{m}\cos(\omega t - k_+ z)$

sur Oy : $-\omega^2 s_0\sin(\omega t - k_+ z) = -\omega_0^2 s_0\sin(\omega t - k_+ z) - \frac{e}{m}E_0\sin(\omega t - k_+ z) - \frac{e s_0\omega B_0}{m}\sin(\omega t - k_+ z)$

On voit que effectivement $\vec s_+$ est solution sous cette forme avec :

$s_0(-\omega^2) = (-\omega_0^2)s_0 - e s_0\left(\frac{\omega B_0}{m}\right) - \frac{e}{m}E_0 \Rightarrow s_0 = \frac{-\frac{e}{m}E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{e\omega}{m}B_0}$

$\vec P_+ = N\vec p = N(-e\vec s_+) = \frac{N\frac{e^2}{m}\vec E}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega\Omega}$ $\quad \left(\Omega = \frac{eB_0}{m}\right)$

donc χ_+ est tel que $\vec P_+ = \varepsilon_0\chi_+\vec E \Rightarrow \chi_+ = \frac{N\frac{e^2}{m\varepsilon_0}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega\Omega}$

ENSET 1975 (Effet Faraday) (1)

I) 1°) $\vec E = \vec E_0 \, e^{i(\omega t - kz)}$ $\quad \vec k = k\vec u_z$

$\vec{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} \Rightarrow -i\vec k\wedge\vec E = -i\omega\vec B \Rightarrow \vec B = \frac{\vec k}{\omega}\wedge\vec E$ et $\Delta\vec E - \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{\partial^2\vec E}{\partial t^2} = \vec 0$

donc $k^2 = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r \times \omega^2 \Rightarrow c_0^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = (\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r)^{-1}$ et $\boxed{\|\vec B\| = \frac{\|\vec E\|}{c_0}}$

2°) soit c la vitesse de la lumière dans le vide : $\frac{c_0}{c} = \frac{1}{n}$ or $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

donc $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1+\chi}}$ donc $\boxed{k = \frac{n\omega}{c}}$

II) 1°) $\vec E \left| \begin{array}{l} E_x = E_0\cos(\omega t - k_+ z) \\ E_y = E_0\sin(\omega t - k_+ z) \\ E_z = 0 \end{array} \right)$ onde polarisée circulairement gauche.

$t = 0,\ z = 0 \quad \vec E_{(0,0)} = E_0\,\vec u_x$

2°) $\vec f = -e\left(\vec E + \vec v\wedge(\vec B + \vec B_0)\right)$ $\quad \|\vec v\| \ll c_0$ or $\|\vec B\| = \frac{\|\vec E\|}{c_0}$ donc $\frac{vB}{c_0} \ll E$

$\vec f \simeq -e\left(\vec E + \vec v\wedge\vec B_0\right)$ $\quad \vec B_0 = B_0\vec u_z$ donc ce champ n'introduit pas de composante selon $\vec u_z$ pour la force : $\underline{\vec f_z = -e\vec E}$ donc pas de perturbation du mouvement suivant Oz.

soit $\vec s_+ = s_{+x}\vec u_x + s_{+y}\vec u_y$ avec $s_{+x} = s_0\cos(\omega t - k_+ z)$; $s_{+y} = s_0\sin(\omega t - k_+ z)$

l'équation du mouvement est : $\frac{d^2\vec s_+}{dt^2} = -\omega_0^2\vec s_+ - \frac{e}{m}\vec E - \frac{e}{m}\dot{\vec s}_+\wedge\vec B_0$

$\dot{\vec s}_+\wedge\vec B_0 = \left(-\omega s_0\sin(\omega t - k_+ z)\vec u_x + s_0\omega\cos(\omega t - k_+ z)\vec u_y\right)\wedge B_0\vec u_z$

$\dot{\vec s}_+\wedge\vec B_0 = \omega s_0\sin(\omega t - k_+ z)B_0\vec u_y + s_0\omega\cos(\omega t - k_+ z)B_0\vec u_x$

sur Ox : $-\omega^2 s_0\cos(\omega t - k_+ z) = -\omega_0^2 s_0\cos(\omega t - k_+ z) - \frac{e}{m}E_0\cos(\omega t - k_+ z) - \frac{e s_0\omega B_0}{m}\cos(\omega t - k_+ z)$

sur Oy : $-\omega^2 s_0\sin(\omega t - k_+ z) = -\omega_0^2 s_0\sin(\omega t - k_+ z) - \frac{e}{m}E_0\sin(\omega t - k_+ z) - \frac{e s_0\omega B_0}{m}\sin(\omega t - k_+ z)$

On voit que effectivement $\vec s_+$ est solution sous cette forme avec :

$s_0(-\omega^2) = (-\omega_0^2)s_0 - e s_0\left(\frac{\omega B_0}{m}\right) - \frac{e}{m}E_0 \Rightarrow s_0 = \frac{-\frac{e}{m}E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{e\omega}{m}B_0}$

$\vec P_+ = N\vec p = N(-e\vec s_+) = \frac{N\frac{e^2}{m}\vec E}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega\Omega}$ $\quad \left(\Omega = \frac{eB_0}{m}\right)$

donc χ_+ est tel que $\vec P_+ = \varepsilon_0\chi_+\vec E \Rightarrow \chi_+ = \frac{N\frac{e^2}{m\varepsilon_0}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega\Omega}$

d'où $\boxed{(n_- - n_+) = \dfrac{Ne^2\omega\Omega}{n_0 m\varepsilon(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$ (3)

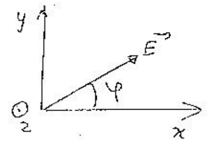
3°) a) $\vec E = \begin{vmatrix} 2E_0\cos(\omega t - kz)\\ 0\\ 0\end{vmatrix}$ à l'entrée $= \vec E_1 \begin{vmatrix} E_0\cos(\omega t - kz)\\ E_0\sin(\omega t - kz)\\ 0 \text{ (circ. g)}\end{vmatrix} + \vec E_2 \begin{vmatrix} E_0\cos(\omega t - kz)\\ -E_0\sin(\omega t - kz)\\ 0 \text{ (circ. d)}\end{vmatrix}$

dans le milieu les deux composantes $\vec E_1$ et $\vec E_2$ se propagent avec les vecteurs d'onde de norme k_+ pour $\vec E_1$ et k_- pour $\vec E_2$ ($k_+ = n_+\frac{\omega}{c}$; $k_- = n_-\frac{\omega}{c}$)

pour $0 \le z \le l$ $\vec E = \vec E_1 \begin{vmatrix} E_0\cos(\omega t - k_+z)\\ E_0\sin(\omega t - k_+z)\\ 0\end{vmatrix} + \vec E_2 \begin{vmatrix} E_0\cos(\omega t - k_-z)\\ -E_0\sin(\omega t - k_-z)\\ 0\end{vmatrix}$

b) $\vec E = \begin{vmatrix} E_0(\cos(\omega t - k_+z) + \cos(\omega t - k_-z)) = 2E_0\cos(\omega t - \frac{k_++k_-}{2}z)\cos(\frac{k_--k_+}{2}z) = E_x\\ E_0(\sin(\omega t - k_+z) - \sin(\omega t - k_-z)) = 2E_0\cos(\omega t - \frac{k_++k_-}{2}z)\sin(\frac{k_--k_+}{2}z) = E_y\\ 0\end{vmatrix}$

$\dfrac{E_y}{E_x} = tg\left(\dfrac{k_--k_+}{2}z\right) = tg\left(\dfrac{n_--n_+}{2c}\omega z\right)$ indépendant de t donc polarisation rectiligne.

c) 

$\varphi(z)$ tel que $\varphi(z) = \dfrac{n_--n_+}{2c}\omega z$ φ augmente lorsque z augmente de 0 à l

d) A la sortie $\theta = \varphi(l) = \dfrac{(n_--n_+)}{2c}\omega l = \dfrac{Ne^2\omega^2}{2c\, n_0 m(\omega_0^2-\omega^2)^2} \times \dfrac{eB_0}{m} l$

donc $\boxed{V = \dfrac{Ne^3\omega^2}{2c\, n_0 m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}}$

e) θ dans le sens direct (lévogyre) si $B_0 > 0$

θ " " rétrograde (dextrogyre) si $B_0 < 0$.

f) on augmente V en diminuant $(\omega_0^2-\omega^2)$ or $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$

donc en rapprochant λ de λ_0 défini par $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$

cependant il faut que $\omega\Omega$ reste très inférieur à $(\omega_0^2-\omega^2)$. (cf III 2°)

g) si i change de sens le courant on change B_0 en $-B_0$ et $\theta(l)$ en $-\theta(l)$

$\ddot s_z + \omega_0^2 s_z = \frac{e}{m}\dot s_y B_0$ donc le vecteur polarisation $\vec P$ a une composante sur Oz et $\vec P$ n'est plus colinéaire à $\vec E$, le milieu n'est plus linéaire. (4)

IV)

1°) Pour une incidente se propageant dans le sens positif de Oz et initialement polarisée suivant Ox les composantes E_{ix} et E_{iy} sont données par III 3° a)

on a vu que $\dfrac{E_{iy}}{E_{ix}} = tg\left(\dfrac{k_--k_+}{2}z\right)$ d'où $\theta = \dfrac{k_--k_+}{2} l$ pour $z = l$.

Pour une onde se propageant dans le sens négatif de Oz et initialement polarisée suivant Ox les composantes E_{rx} et E_{ry} sont obtenues en faisant le raisonnement du III 3° a) b) – en transposant les résultats on a :

$\vec E_r = \begin{vmatrix} E_{0r}\cos(\omega t + k_+z)\\ E_{0r}\sin(\omega t + k_+z)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{0r}\cos(\omega t + k_-z)\\ -E_{0r}\sin(\omega t + k_-z)\end{vmatrix}$

soit $\vec E_r = \begin{vmatrix} 2E_{0r}\cos(\omega t + \frac{k_++k_-}{2}z)\cos(\frac{k_+-k_-}{2}z)\\ 2E_{0r}\cos(\omega t + \frac{k_++k_-}{2}z)\sin(\frac{k_+-k_-}{2}z)\end{vmatrix}$ } l'onde réfléchie est aussi plane, polarisée rectilignement.

donc $\dfrac{E_{ry}}{E_{rx}} = tg\left(\dfrac{k_+-k_-}{2}z\right) = -tg\left(\dfrac{k_--k_+}{2}z\right)$

2°) l'onde incidente lorsqu'elle arrive sur le miroir a subi une rotation de θ, par réflexion il y a déphasage de π donc rotation de π et sur le trajet retour entre $z=0$ et $z=l$ la rotation sera θ' tel que $\boxed{tg\,\theta' = -tg\left(\frac{k_--k_+}{2}(-l)\right)}$

donc $tg\,\theta' = tg\,\theta$ soit $\theta' = \theta$. D'autre part une rotation de π ne change pas le plan de polarisation donc la rotation totale est 2θ

3°) le coefficient de réflexion est $r = \dfrac{n_0 - n'}{n_0 + n'} < 0$ il y a donc, comme dans le cas du miroir un déphasage de π (qui n'intervient d'ailleurs pas dans le calcul de la rotation). La réflexion n'est que partielle.