B / HYGROMÈTRE CAPACITIF

Certains oxydes métalliques comme Al_2O_3 (alumine) sont hygroscopiques, c'est-à-dire qu'ils peuvent absorber l'eau contenue dans un gaz humide. En conséquence, leurs propriétés électriques, notamment leur permittivité diélectrique ε sont modifiées. L'utilisation de ces substances comme isolant électrique d'un condensateur permet de réaliser des capacités C_h qui dépendent de l'humidité relative HU_R selon la loi approchée :

$$C_h = C_0\,(1 + a.HU_R)$$

où C_0 et a sont deux constantes.

Ce type de condensateur est réalisé à partir d'une lame d'aluminium constituant l'une des armatures, sur laquelle est déposée une couche d'alumine poreuse. La seconde armature du condensateur est une lame d'or. La mesure de la capacité de ce type de condensateur constitue actuellement une technique fiable et précise pour déterminer l'humidité relative.

Etudions dans cette partie un montage électrocinétique permettant la mesure de C_h. Le montage complet est représenté sur la figure 5 et ses différents éléments seront abordés successivement au cours du problème.

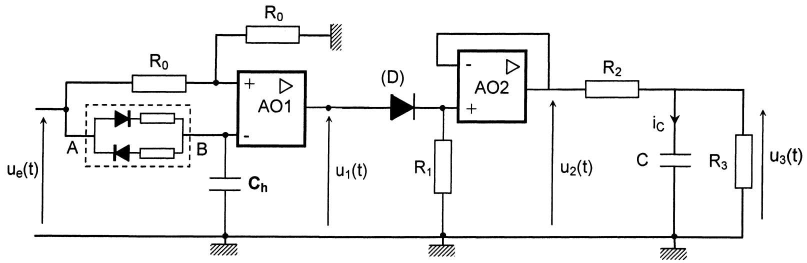

Figure 5 : Schéma électrique complet de l'hygromètre

Les diodes utilisées (figure 6) sont supposées idéales, ce qui signifie :

$i_d = 0$ lorsque $u_d \leq 0$ (état bloqué)

$u_d = 0$ lorsque $i_d \geq 0$ (état passant)

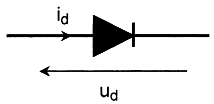

Figure 6

B1. Quelle est l'origine physique de la variation de la constante diélectrique de l'alumine $Al_2O_{3(s)}$ lorsqu'elle absorbe de l'eau ?

B2. La capacité étudiée varie de 110 pF à 250 pF lorsque l'humidité relative HU_R passe de la valeur 0 à la valeur 1. Calculer les valeurs numériques de C_0 et a.

Considérons le dipôle (AB) représenté sur la figure 7, pour lequel (D_a) et (D_b) sont deux diodes idéales identiques.

B3. Montrer que les deux diodes ne peuvent pas être simultanément dans le même état. Déterminer, selon le signe de la tension u, le résistor ohmique équivalent à (AB).

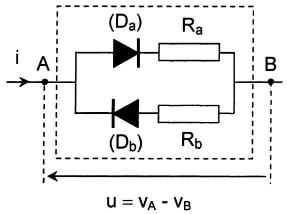

Figure 7

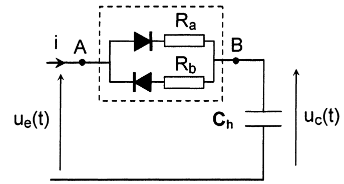

Figure 8

Ce dipôle est maintenant inséré dans le montage de la figure 8 dans lequel $u_e(t)$ est une tension nulle pour $t < 0$ et $t > T_1$ et égale à une constante $E > 0$ lorsque $0 < t < T_1$. A l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé.

B4*a. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ puis exprimer sa solution pour $0 < t < T_1$, en faisant apparaître une constante de temps, notée τ_a.

À partir de l'instant T_1, $u_e(t)$ redevient nulle.

B4*b. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$? Expliciter dans ce cas $u_c(t)$ pour $t > T_1$, en fonction des paramètres E, T_1, R_a, R_b et C_h.

B4*c. Représenter l'allure de $u_c(t)$ en fonction du temps dans le cas particulier où $R_b = 10\ R_a$. Faire figurer sur ce schéma les asymptotes et les points remarquables.

Dans le montage de la figure 9a, l'amplificateur opérationnel (AO1) est supposé idéal et fonctionne en régime de saturation. Les tensions de saturation haute et basse sont notées respectivement $+U_{SAT}$ et $-U_{SAT}$.

$u_e(t)$ est maintenant une tension créneau périodique de période T, maintenue à une valeur constante $E > 0$ pendant une durée T_1 ($T_1 < T$) et nulle pendant le reste de la période, schématisée sur la figure 9b.

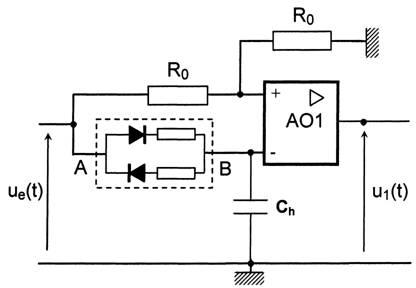

Figure 9a

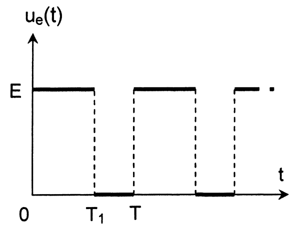

Figure 9b

Le régime permanent est supposé établi : toutes les tensions sont périodiques avec la même période T. Celle-ci est choisie de sorte que R_bC_h << T, ce qui entraîne que le condensateur est déchargé à la fin de chaque période. Le fonctionnement du montage sera donc étudié entre les instants 0 et T.

B5*a. Expliciter la condition reliant $\tau_a = R_aC_h$ et la durée T_1, pour que la tension $u_1(t)$ en sortie de l'AO1 puisse basculer de + U_{SAT} à – U_{SAT} durant la phase où u_e = E. *(cette condition sera supposée vérifiée par la suite)*
Déterminer, en fonction de τ_a, l'instant T_2 qui correspond au basculement de $u_1(t)$ de la valeur + U_{SAT} à la valeur – U_{SAT}.

B5*b. Évaluer la valeur minimale de T_1 assurant le fonctionnement correct du montage, sachant que R_a = 2,70 MΩ. Calculer les deux valeurs extrêmes de T_2 qui correspondent respectivement à C_h = 110 pF et C_h = 250 pF.

B5*c. En choisissant les valeurs numériques suivantes : T = 1,0 ms, T_1 = 1,0 ms, C_h = 110 pF, E = 5,0 V et U_{SAT} = 12,6 V, représenter en concordance de temps les tensions $u_c(t)$ et $u_1(t)$ sur un intervalle de temps de deux periodes.

Le montage représenté sur la figure 10 est destiné à mettre en forme la tension $u_1(t)$ délivrée par le circuit précédent. Il comprend un amplificateur opérationnel idéal (AO2) en régime linéaire et une diode (D) idéale.

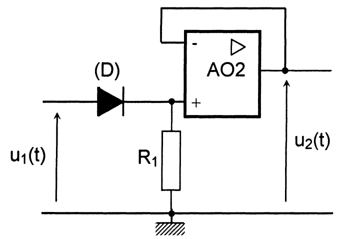

Figure 10

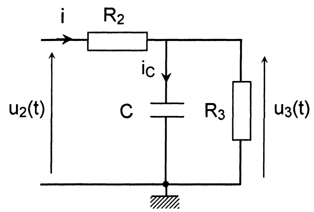

Figure 11

B6. Déterminer, selon le signe de $u_1(t)$, l'expression de la tension $u_2(t)$ en sortie de l'AO2.
Représenter le chronogramme de $u_2(t)$ sur un intervalle de temps de deux periodes.

Cette tension u_2 est appliquée à l'entrée du filtre passif représenté sur la figure 11 et constitué de deux résistances R_2 et R_3, ainsi que d'un condensateur de capacité C.

*Le régime permanent étant établi, la tension $u_3(t)$ est périodique de période T : elle évolue entre une valeur minimale U_{min} atteinte aux temps nT (n entier) et une valeur maximale U_{max} atteinte aux temps nT + T_2, où T_2 est la durée déterminée à la question B5*a.*

Etant donnée une fonction f(t) périodique de période T, sa valeur moyenne est définie par :

$$< f(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\,.$$

B7*a. Calculer la valeur moyenne de $u_2(t)$ en fonction de U_{SAT}, T et T_2.

B7*b. Montrer que la valeur moyenne $\langle i_c(t)\rangle$ de l'intensité qui traverse le condensateur est nulle. En déduire la valeur moyenne $\langle u_3(t)\rangle$ en fonction de U_{sat}, T, T_2, R_2 et R_3.

Afin d'alléger les expressions littérales intervenant dans les questions suivantes, posons la quantité $\tau = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}C$.

B8*a. Écrire l'équation différentielle du premier ordre à laquelle obéit $u_3(t)$ lorsque 0 < t < T_2.
Expliciter sa solution en fonction de U_{min}, U_{SAT}, R_2, R_3 et τ. *(ne pas chercher à déterminer U_{min} dans cette question)*

B8*b. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par $u_3(t)$ lorsque T_2 < t < T ? Déterminer sa solution en fonction de U_{max}, τ et T_2. *(sans chercher à déterminer U_{max} dans cette question)*

B8*c. Montrer que U_{max} et U_{min} prennent les valeurs suivantes :

$$U_{max} = \frac{R_3}{R_2+R_3}U_{SAT}\frac{1-\exp(-T_2/\tau)}{1-\exp(-T/\tau)}$$

$$U_{min} = \frac{R_3}{R_2+R_3}U_{SAT}\exp\left[-(T-T_2)/\tau\right]\frac{1-\exp(-T_2/\tau)}{1-\exp(-T/\tau)}\,.$$

Le taux d'ondulation ρ est défini par le quotient : $\rho = \frac{U_{max}-U_{min}}{< u_3(t) >}$.

B8*d. Déterminer l'expression du taux ρ en fonction de T, T_2 et τ.
Application numérique : calculer ρ dans le cas le plus défavorable, avec pour valeurs numériques T = 1,0 ms et τ = 20 ms. Conclure.

B8*e. Sur quels facteurs est-il possible de jouer pour diminuer le taux d'ondulation ρ ?

Au contact de l'air ambiant d'un local, le dispositif délivre une tension u_3 = 3,72 V.

B9. Déterminer l'humidité relative HU_R dans le local, en utilisant les données numériques suivantes : R_2 = 56,0 KΩ , R_3 = 140 kΩ , R_a = 2,70 MΩ , U_{SAT} = 12,6 V et T = 1,0 ms.

FIN DE L'EPREUVE