PARTIE B - INTERFEROMETRIE STELLAIRE

En 1 996, les astronomes ont déterminé, avec une excellente précision, la géométrie de l'étoile double Capella, dans le domaine spectral du proche infrarouge. La méthode utilisée est celle qui fut imaginée dès 1 868 par Fizeau, puis mise en œuvre pour la première fois par Michelson en 1920, dans le domaine visible.
L'apport nouveau réside dans la neutralisation des effets perturbants de la turbulence atmosphérique par l'utilisation de trois télescopes : on combine convenablement les facteurs de visibilité des franges d'interférence obtenues avec les différents couples de télescopes.

1. Système optique

L'objectif d'un télescope est constitué d'un miroir primaire sphérique M_p , concave, dont le rayon de courbure sur l' axe optique est de 30 m, et un petit miroir sphérique secondaire M_s convexe, de rayon de courbure 32 m (Figure 1). La distance entre les sommets S_1 et S_2 des deux miroirs est 9 m.

a) Où se trouve le foyer image F_p du miroir primaire M_p ?

b) Quelle est, par rapport au sommet S_2 du miroir secondaire M_s, la position de l'image F_c que donne M_s de F_p ? En déduire la distance qui sépare F_c du sommet S_1 du miroir primaire.

Dans la suite, on assimile le télescope à une lentille mince convergente L, de centre O et de distance focale image f=24m.

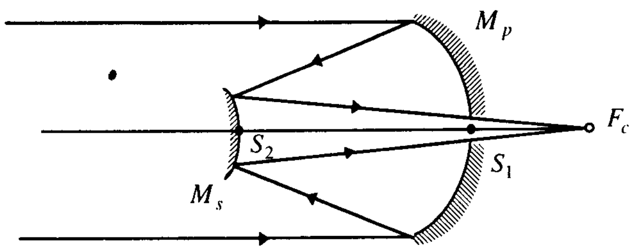

Figure 1

2. Image d'un objet ponctuel

On considère un diaphragme percé d'une ouverture caractérisée par la fonction pupillaire τ (x, y) qui vaut 1 en tout point M de l'ouverture et 0 en tout point en dehors de l'ouverture ; x et y sont les coordonnées cartésiennes de M dans un système d'axes perpendiculaires situés dans le plan du diaphragme,

Lorsqu'on éclaire un tel diaphragme, à l'aide d'une onde incidente, plane, tombant en incidence normale, la répartition de l'éclairement, dans le plan XY, parallèle au plan du diaphragme et situé à l'infini, se met sous la forme :

$$I(P) = \psi(u,v)\,\psi^*(u,v) \quad \text{avec} \quad \iint P(x,y) \exp[-i\, 2\pi(ux+vy)]\, dxdy$$

P étant un point quelconque du plan XY; u et v sont deux variables reliées à X et Y. On rappelle que i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$, noté parfois j ; le signe moins de l'argument de l'exponentielle n'a qu'une importance conventionnelle.

On place le diaphragme devant la lentille représentant le télescope et on observe la répartition de l'éclairement dans son plan focal image autour du foyer principal image F.

a) Pourquoi la figure de diffraction, observée dans le plan focal image de la lentille, c'est-à-dire à distance finie, relève-t-elle de la théorie de la diffraction dite à l'infini. Quelle est la signification physique de l'argument de l'exponentielle ? Justifier l'appellation fréquences spatiales pour u et v.

b) Trouver la répartition I(u) de l'éclairement dans le cas d'une fente infiniment allongée selon Oy et de largeur ε selon Ox. Représenter avec soin le graphe I(u), en calculant la hauteur relative du premier maximum secondaire comparée à celle du maximum central.

c) Calculer la largeur totale ΔX du maximum central dans le plan focal, dans le cas où $\varepsilon = 14$cm , $\lambda = 635$ nm et f = 24 m. En déduire la demi-largeur angulaire $\Delta X / f$ en millisecondes d'arc. On rappelle que 1" = 5 μrad.

3. Fentes de Young

Le diaphragme pupillaire est percé de deux fentes F_1 et F_2, de largeur ε et distantes de a.

a) Trouver la répartition de l'éclairement I(u) dans le plan focal image de la lentille lorsque l'étoile observée est un point lumineux situé sur l'axe de la lentille.

b) Représenter, avec soin, le graphe I(u), dans le cas où $\varepsilon = 14$cm et a = 70cm. Calculer, en millisecondes d'arc, l'interfrange angulaire pour $\lambda = 635$nm.

c) Que devient le graphe précédent lorsque le rapport ε / a tend vers 0 ? Quelle conclusion physique doit-on alors tirer sur l'influence de la largeur des fentes ?

4. Distance angulaire d'une étoile double symétrique

On pointe, avec le dispositif des fentes de Young, le centre Ω d'une étoile double symétrique ; cette étoile est constituée de deux sources primaires incohérentes E_1 et E_2, de contributions égales en intensité : $I_{s1} = I_{s2} = I_s$.
On oriente la direction définie par les fentes de telle sorte que F_1F_2 passant par O soit parallèle à E_1E_2 (Figure 2). La largeur ε de chacune des fentes est négligeable devant la distance a qui les sépare.
On désigne par λ la longueur d'onde, D_s la distance ΩO, x_{s1} la position de E_1 selon un axe Ωx_s parallèle à l'axe pupillaire Ox et x_{s2} la position analogue de E_2 . On a ici : $x_{s2} = -x_{s1}$.

a) Quelles sont, en fonction de I_s, λ, a, X, f, D_s, x_{s1} et x_{s2}, les contributions de E_1 et E_2 dans l'éclairement du plan focal de la lentille ?

b) Montrer, *sans calcul*, que la répartition de l'éclairement devient uniforme lorsque la distance a des deux fentes prend une valeur particulière a_1 que l'on déterminera en fonction de λ et de la distance angulaire θ qui sépare E_1 et E_2.

c) Etablir l'expression de la répartition de l'éclairement résultant des contributions de E_1 et E_2. Dans le cas de Capella, supposée symétrique dans le visible, pour $\lambda = 635$ nm , on a trouvé $a_1 = 116{,}5$ cm. En déduire θ en milliseconde d'arc.

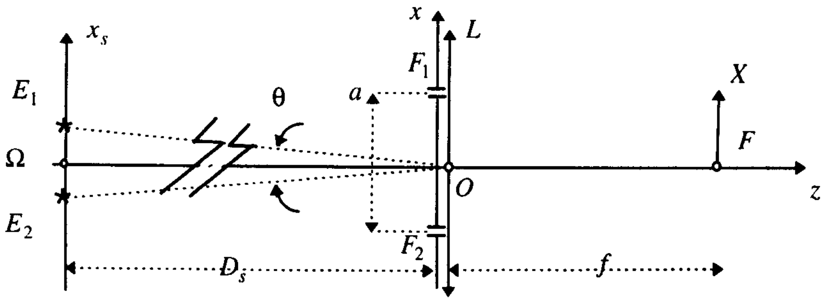

Figure 2

5. Interféromètre à deux télescopes

Au lieu d'utiliser un seul télescope dont la pupille est percée de deux trous, on couple deux télescopes identiques T_1 et T_2, de même ouverture circulaire, de diamètre négligeable par rapport à la ligne de base $a = T_1T_2$ (Figure 3). Dans ce cas, la position moyenne de l'étoile est repérée par l'angle α, différent de 0, que fait, avec la normale à T_1T_2, la direction $O\Omega$, O étant le milieu de T_1T_2.
On désigne ici aussi par D_s la distance $O\Omega$, x_{s1} la position de E_1 selon un axe Ωx_s perpendiculaire à la direction $O\Omega$, et x_{s2} la position analogue de E_2, avec : $x_{s2} = -x_{s1}$.
Un dispositif annexe permet de faire interférer les ondes optiques issues des deux foyers images en introduisant une différence de marche supplémentaire L, déterminée.
On se place dans le cas où $a = 6{,}10$ m et $\alpha = 60°$. En outre, le rayonnement est quasi-monochromatique et centré sur la longueur d'onde $\lambda = 635$ nm . Enfin l'étoile est supposée symétrique : $I_{s1} = I_{s2} = I_s$.

a) Exprimer, en fonction de λ, α, L_s a, x_{s1}, x_{s2} et D_s les différences de phase ϕ_1 et ϕ_2 associées à E_1 et E_2.,

b) Montrer que l' éclairement total I s'écrit : $I = 2I_s\left[1+\cos\left(\dfrac{\pi b\theta}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi\dfrac{l+L_s}{\lambda}\right)\right]$

b et l étant des longueurs que l'on déterminera en fonction de a et de α .

c) Trouver, en milliseconde d'arc, la plus petite distance angulaire que l'on a pu détecter en obtenant un éclairement uniforme avec les valeurs précédentes de a, λ et α. Quel est l'intérêt d'un tel système par rapport à celui décrit à la question 4 ?

d) On s'arrange généralement pour que $L_s = -l$. Quelle en est la raison ?

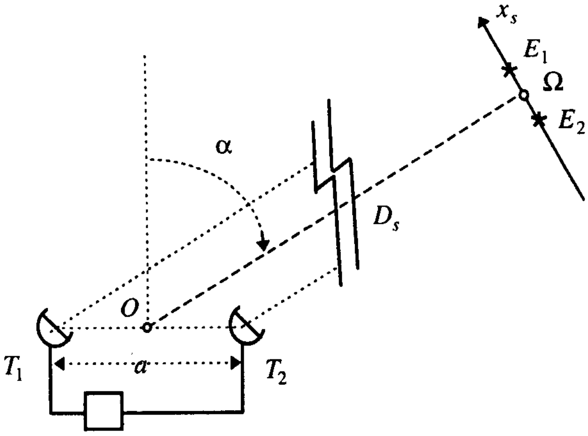

Figure 3

6. Distance angulaire des composantes d'une étoile double non symétrique

On considère à nouveau le montage de la figure 2, mais les contributions de E_1 et E_2 sont différentes :
$I_{s2} = \mu\, I_{s1}$, μ étant un facteur inconnu.

a) Montrer que la nouvelle répartition de l'éclairement total dans le plan focal image de la lentille peut se mettre sous la forme : $I(P) = \left(I_{s1} + I_{s2}\right)\left[1 + \mathrm{Re}\left\{\underline{\gamma}_s \exp\left(i2\pi\frac{aX}{\lambda f}\right)\right\}\right]$

où $\underline{\gamma}_s$, appelé degré complexe de cohérence spatiale, a pour expression : $\underline{\gamma}_s = C_1 \exp\left(i\pi\frac{a}{l_s}\right) + C_2 \exp\left(-i\pi\frac{a}{l_s}\right)$

(C_1, C_2) étant deux facteurs que l'on exprimera en fonction de μ , et l_s une largeur que l'on reliera à λ et à la distance angulaire θ. En déduire la partie réelle, la partie imaginaire, le module $\left|\underline{\gamma}_s\right|$ et l'argument α_s de $\underline{\gamma}_s$.

b) Le facteur de visibilité des franges d'interférence est défini expérimentalement par $V = (I_M - I_m) / (I_M + I_m)$, I_M étant la valeur maximale de l'éclairement et I_m sa valeur minimale. Quelle relation simple existe-t-il entre $\underline{\gamma}_s$ et V ?

c) Donner l'expression de V en fonction de μ et de $\cos(\pi a / l_s)$. Quelles sont les valeurs minimale V_m et maximale V_M de V en fonction de μ ?, Que deviennent ces valeurs dans le cas où $\mu = 1$?

d) Pour $a = a_1 = 116{,}5$ cm, on atteint la première valeur minimale V_m qui vaut 0,35. En outre, on constate que $\alpha_s > 0$. Trouver la distance angulaire θ et la valeur de μ.