

PREMIER PROBLEME

1

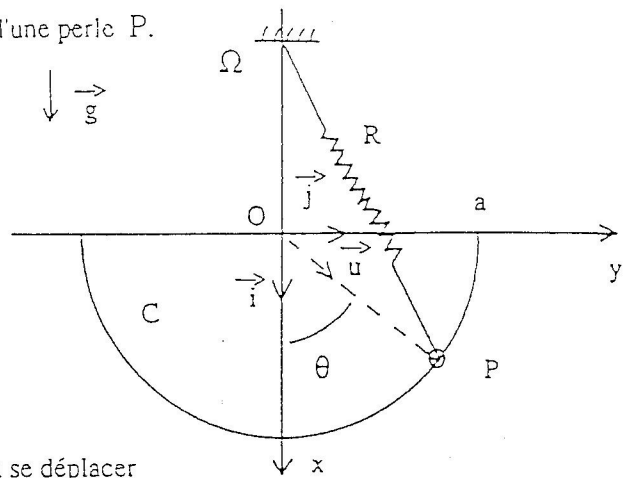
NOTA : La partie C peut être traitée indépendamment de la partie B.

ETUDE D'UN SYSTEME MASSE-RESSORT

On se place dans le repère \mathcal{R} ($O x y z$) orthonormé, direct, galiléen, de vecteurs unitaires de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Le système

envisagé est constitué d'un ressort R , d'un demi-cercle C et d'une perle P .

Le ressort R est parfait, c'est-à-dire sans masse et développant selon sa propre direction une force proportionnelle à son élongation. On note K ce coefficient de proportionnalité et ℓ la longueur à vide de R . Le demi-cercle (fixe dans \mathcal{R}) C , de rayon a , de centre O , est contenu dans le demi-plan xOy ,



$x \geq 0$ supposé vertical, Ox étant la verticale descendante.

La perle P est un objet quasi-punctuel de masse M astreint à se déplacer sans frottement sur C . Le ressort R a une extrémité liée à P et l'autre à un point Ω situé aux cotes $x = -a, y = 0, z = 0$ de \mathcal{R} .

La position de P dans \mathcal{R} est repérée par l'angle $\theta = (\vec{i}, \vec{OP})$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On note \vec{u} le vecteur unitaire de \vec{OP} , \vec{v} le vecteur unitaire déduit de \vec{u} par la rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de \vec{k} . Le système est placé dans le champ de pesanteur d'accélération $\vec{g} = g \vec{i}$ de module g constant.

A. Etude d'équilibres possibles

Les expressions vectorielles demandées (questions 1, 3, 4 et 5) seront exprimées dans la base \vec{u}, \vec{v} .

1. Donner l'expression du vecteur $\vec{P\Omega}$ en fonction de a et θ .
2. Donner l'expression du module $P\Omega$ de $\vec{P\Omega}$ en fonction de a et θ (ou mieux, de $\frac{\theta}{2}$).
3. Donner l'expression de la tension \vec{T} du ressort en fonction de a, K, ℓ et θ (ou mieux, de $\frac{\theta}{2}$).
4. Soit \vec{F} la résultante des forces extérieures appliquées à la masse M . On note r le module de la réaction de C sur P . Donner l'expression de \vec{F} en fonction de a, g, K, ℓ, M, r et θ .
5. Donner l'expression de la vitesse \vec{V} de P dans \mathcal{R} , en fonction de a et de la dérivée temporelle convenable de θ .
On notera : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$
6. Donner, en fonction de a, g, K, ℓ, M, θ et $\dot{\theta}$, l'expression du produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{V}$.
7. En déduire, en fonction des mêmes paramètres à l'exception de $\dot{\theta}$, l'expression de l'énergie potentielle E_p dont dérive la force \vec{F} .
8. Ecrire l'expression de l'énergie mécanique totale E du système.
9. En déduire, lorsque le mouvement de M a lieu, son équation différentielle en fonction de a, g, K, ℓ, M, θ et ses dérivées convenables.

10. Déterminer l'expression des positions d'équilibre $\theta = \theta_1$ envisageables pour le système.
11. On veut imposer l'existence d'une position d'équilibre pour une valeur $\theta_1 \neq 0$ de θ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (ce qui implique par symétrie une position équivalente $-\theta_1$, entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$). Ecrire les inégalités que cela implique sur les paramètres du problème. Donner une interprétation physique de ces conditions.
12. Les conditions ci-dessus étant réalisées, étudier la stabilité des équilibres ainsi obtenus.

B. Etude d'un cas particulier

On se donne ici les relations entre paramètres suivants :

$$a = 2 \frac{Mg}{K} \quad \text{et} \quad \ell = \sqrt{3} \left(a - \frac{Mg}{K} \right)$$

13. Vérifier que les conditions établies à la question 11 sont réalisées. Expliciter les positions d'équilibre. Donner, pour ces positions, les valeurs numériques du facteur $\frac{1}{Ka^2} \cdot \frac{d^2E}{d\theta^2}$ et valider les conclusions de la question 12.
14. Pour étudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre θ_1 , on pose $\theta = \theta_1 + \varepsilon$. Etablir l'équation différentielle linéaire en ε de ces petits mouvements. On posera $\omega^2 = \frac{K}{M}$, où ω est la pulsation naturelle intrinsèque du système masse-ressort libre.
15. Donner l'expression de la solution de l'équation ci-dessus pour les conditions initiales suivantes :

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt}(0) = \dot{\varepsilon}_0 = \sqrt{\frac{Ka - Mg}{2Ma}}$$

Applications numériques

Soient les valeurs numériques :

$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}, \quad K = 10^3 \text{ N.m}^{-1}, \quad M = 1 \text{ kg.}$$

16. Calculer la constante K' du ressort donnant la même pulsation naturelle en régime de vibrations libres que celle obtenue à la question 14. Interpréter physiquement.
17. Calculer la longueur L du pendule simple synchrone équivalent. Interpréter le rôle de a .

C. Approche analytique complémentaire

18. Donner, dans le repère \mathcal{R} , l'expression du moment cinétique σ_O de la masse M par rapport à O en fonction de a , M et $\dot{\theta}$.
19. Donner, en fonction de a , g , K , ℓ , M et θ , l'expression du produit vectoriel $\vec{OP}_A \wedge \vec{F}$ (\vec{F} étant, cf question 4, la résultante des forces extérieures appliquées à P).
20. En déduire, par application du théorème du moment cinétique, l'expression de l'équation différentielle du mouvement de P . Vérifier que l'on retrouve l'expression obtenue à la question 9.