extrait CCP TPC 97

1.DISPOSITIF D'ÉTUDE ÉLECTROMÉCANIQUE

Une tige métallique homogène OPQ est mobile en O autour de l'axe vertical Oz. Elle est en contact en P et en Q avec deux rails conducteurs horizontaux formant chacun un arc de cercle de centre O et de rayons respectifs R - L/2 et R+L/2. La distance entre les deux rails vaut donc L et le rayon moyen R.
Le schéma du dispositif est donné en figure 1.
On négligera la résistance électrique de la tige et des rails.

La position de la tige est repérée par l'angle polaire θ qu'elle fait avec l'axe Ox. On notera $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire de la tige, l'orientation du plan étant précisée sur la figure 1.

La partie PQ de la tige se trouve plongée dans un champ magnétique localement uniforme $\vec{B} = -B\vec{u}_z$, $\vec{u}_z$ étant le vecteur unitaire de l'axe Oz et B l'intensité du champ magnétique (B>0).
Les extrémités gauches des deux rails sont connectées à un dipôle électrique D dont on précisera éventuellement la nature ultérieurement.
Le circuit ainsi formé est orienté de sorte que le sens positif soit défini de P vers Q. On notera alors i l'intensité algébrique du courant électrique circulant éventuellement dans ce circuit.

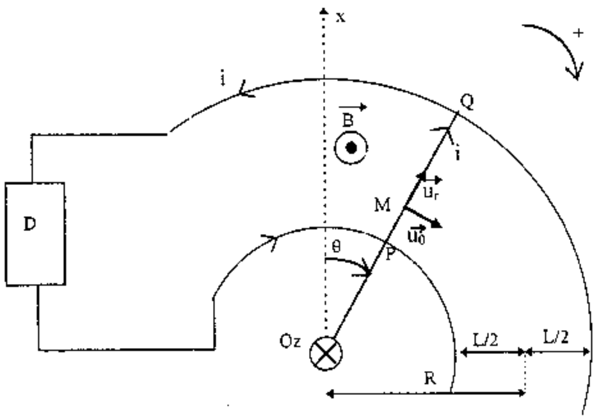


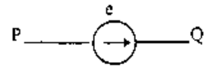
Figure 1

Tournez la page SVP

1.1.Etude de la force électromotrice (fem) induite.

a) Montrer qu'au plan électrique, on peut modéliser la partie PQ de la tige par une fem induite e dont on mettra l'expression sous la forme e=-kω en exprimant le paramètre k en fonction du rayon moyen R, de la distance L entre les rails et de l'intensité B du champ magnétique. La convention choisie pour définir e est précisée sur la figure 2.

Figure 2



b) Le dipôle D est un résistor de résistance r et on impose une vitesse angulaire positive ω à la tige.
En précisant la loi utilisée, déterminer par une étude qualitative de signe de l'intensité i du courant induit qui apparaît dans le circuit.
Vérifier ce résultat en établissant l'expression de i en fonction de r, R, B, ω et L.

1.2.Etude des forces de Laplace s'exerçant sur la partie de la tige située entre P et Q.

D est un dipôle quelconque.
a) Pour tout point M de la tige situé entre P et Q, on pose $\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r$.
Exprimer sur la base locale $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ associée au système de coordonnées cylindro-polaires la force élémentaire de Laplace $d\vec{F}_M$ s'exerçant sur l'élément de la tige de longueur dr en fonction de dr, B, i.
Dessiner cette force en supposant i>0.
b) Exprimer le moment en O que l'on notera $d\vec{\Gamma}_M(O)$ de cette force élémentaire $d\vec{F}_M$.
c) En déduire l'expression de la composante $\Gamma_z(O)$ sur $\vec{u}_z$ du moment en O de toutes les forces de Laplace élémentaires s'exerçant sur la partie PQ de la tige.
Donner $\Gamma_z(O)$ en fonction de i et du paramètre k défini lors de l'étude de la fem induite e.

2.ORIENTATION D'UNE ANTENNE PARABOLIQUE PAR UN MOTEUR ÉLECTRIQUE

On considère un moteur électrique où interviennent les mêmes phénomènes électriques et mécaniques que ceux étudiés dans le dispositif précédent.
Il est alimenté par un générateur de tension continue E en série avec une résistance R de 2,5 Ω comme l'indique la figure 3.
La partie mobile, appelée rotor, comporte un enroulement filiforme parcouru par le courant d'intensité variable i . Ce rotor baigne dans le champ magnétique produit par un système d'aimants permanents appelé inducteur. Il tourne autour de son axe de révolution Oz à la vitesse angulaire ω, son centre de masse étant situé sur cet axe.
Le moment par rapport à l'axe Oz des forces de Laplace agissant sur le rotor (figure 4) a pour expression :

$$\Gamma_L = K.i$$

La fem e induite dans le rotor par son mouvement dans le champ de l'inducteur a pour expression :

$$e = K.\omega.$$

On négligera le coefficient d'autoinduction du rotor mais on tiendra compte de sa résistance r.
Pour les applications numériques, on prendra K= 0.1 V.rad^{-1}.s et r =10 Ω .

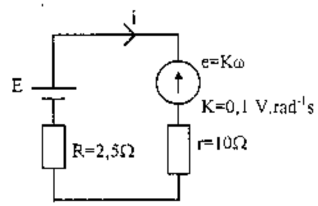


Figure 3

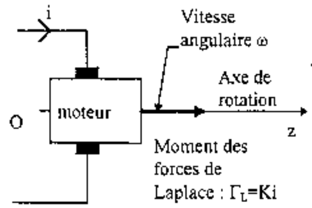


Figure 4

2.1.Le rotor, par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse, peut faire pivoter autour d'un axe vertical O_2z_2 une antenne parabolique et ainsi permettre son orientation dans une direction déterminée. Le dispositif est représenté sur la figure 5. La vitesse angulaire de l'antenne ω_2 autour de l'axe O_2z_2 est égale à la vitesse angulaire du rotor ω divisée par un nombre N relativement grand.

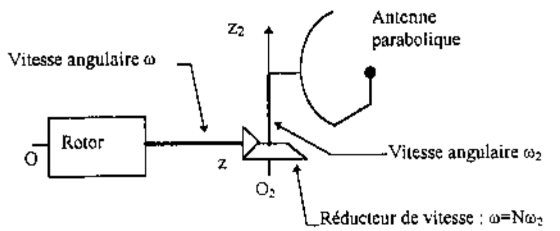


Figure 5

Soit I_1 le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz de l'ensemble tournant à la vitesse angulaire ω et I_2 le moment d'inertie par rapport à l'axe O_2z_2 de l'ensemble tournant à la vitesse angulaire ω_2.
Montrer à partir de l'expression de l'énergie cinétique que l'ensemble constitué du rotor, du réducteur de vitesse et de l'antenne peut être considéré comme un solide (S) tournant à la vitesse angulaire ω autour de Oz avec un moment d'inertie I s'exprimant en fonction de I_1, I_2 et N.

2.2.Le solide (S) de moment d'inertie I est donc soumis aux forces de Laplace de moment $\Gamma_L = Ki$.
On modélise l'action des divers frottements sur (S) par un couple de moment Γ_f par rapport à l'axe de rotation Oz dont on donne ci-dessous l'expression :

$$\Gamma_f = -C-\beta\omega \quad \text{où C et } \beta \text{ sont des constantes positives.}$$

A quels types de frottements correspondent respectivement chacun des deux termes de l'expression de Γ_f ?

2.3.Le moteur ne démarre que si E atteint la valeur de 2V. En déduire la valeur de la constante C.

2.4.On fixe maintenant E à 16V. Le moteur initialement à l'arrêt démarre et atteint un régime permanent dont la vitesse angulaire a pour valeur $\omega_{lim}=100$ rad.s^{-1}.
Calculer pour ce régime permanent l'intensité i_{lim} du courant électrique et en déduire la valeur de la constante β.

2.5.On étudie maintenant l'évolution de l'intensité i(t) du courant électrique dans le moteur et de la vitesse angulaire $\omega(t)$ de son rotor en fonction du temps t.

a) Donner les deux équations liant i(t) et $\omega(t)$ et leurs dérivées éventuelles avec E, C, $R_e=R+r$, β, I et K comme paramètres.
b) En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par $\omega(t)$.
c) Résoudre cette équation et exprimer $\omega(t)$ avec comme paramètres ω_{lim} et une constante de temps τ que l'on exprimera en fonction de K, I, R_e et β. On prendra $\omega(0) = 0$, le moteur étant initialement à l'arrêt.
d) L'enregistrement de i(t) indique une constante de temps $\tau = 0,2$ s. Calculer le moment d'inertie I.
e) Tracer l'allure des courbes représentatives de $\omega(t)$ et i(t) à partir de l'instant t =0 .