DEUXIÈME PROBLÈME *(10 points)*

Des expériences récentes de physique atomique ont pu porter sur un électron unique. Le but de ce problème est une étude sommaire du « piège à électron » utilisé ou piège de PENNING et du mouvement de la particule dans ce piège qui comporte un champ électrique et un champ magnétique.

La question 2 est, dans une large mesure, indépendante de la question 1.

1. L'espace étant rapporté au trièdre $(Oxyz)$ des coordonnées cartésiennes, on se propose d'étudier une répartition de potentiel au voisinage de l'origine O, obéissant à certaines conditions. Pour cela, on écrit *a priori* le potentiel électrostatique en $M(x, y, z)$ sous forme d'un développement limité au second ordre :

$$V(x, y, z) = V(0, 0, 0) + \alpha x + \beta y + \gamma z + ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz.$$

1.1. Montrer que la condition « le champ électrostatique $\vec{E}$ est nul en O » permet de déterminer α, β, γ.

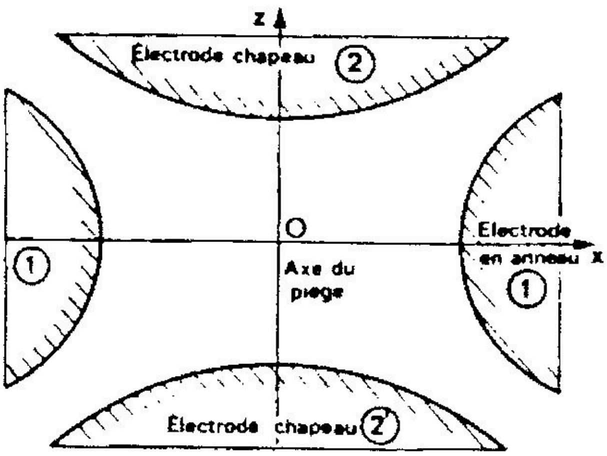
1.2. Montrer que la condition « le problème est de révolution autour de l'axe Oz » permet de déterminer la valeur de d, e, f et implique une relation entre a et b.

1.3. L'espace étant vide de charges à proximité de O, montrer que l'équation fondamentale vérifiée par V permet de le mettre sous la forme :

$$V(x, y, z) = V(0, 0, 0) + a(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Quelle est alors la nature des équipotentielles dans un plan méridien tel que (xOy) ?

2. On réalise alors le dispositif suivant, de révolution autour de l'axe Oz.



① est une électrode en « anneau » dont la méridienne dans le plan xOz a pour équation $x^2 - 2z^2 = R^2$. Cette électrode est portée au potentiel $U_0 > 0$.

② et ②' sont deux électrodes en « chapeau » dont les méridiennes dans le plan xOz ont pour équation $x^2 - 2z^2 = -2\ell^2$.

Ces électrodes sont portées au potentiel zéro.

On négligera les effets de bords.

2.1. Vérifier que ces électrodes réalisent un potentiel de type vu en 1.3. dans tout l'espace interarmatures, soit :

$$V(x, y, z) = V(0, 0, 0) + a(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Calculer le potentiel $V(0, 0, 0)$ et la constante a en fonction des données U_0, ℓ, R.
Quelle est la nature des surfaces équipotentielles ?

2.2. Calculer le champ $\vec{E}(x, y, z)$ au point M. En déduire l'équation des lignes de champ dans un plan méridien, puis dans le plan (xOy).

2.3. Représenter sur un schéma les lignes équipotentielles et les lignes de champ dans un plan méridien, puis dans le plan (xOy).

Un électron (masse m, charge $-e$) est mobile au voisinage de O sous l'action du champ ainsi créé. Écri son équation de mouvement en projection sur les trois axes. On posera $\omega_z^2 = \frac{4ea}{m}$ et on se placera dans cadre de la mécanique non relativiste.

Montrer que O est une position d'équilibre de l'électron et discuter la stabilité pour un mouvement suiva Oz, ou dans le plan xOy.

Application numérique :
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $U_0 = 9{,}3$ V, $R = \ell\sqrt{2} = 4{,}8$ mm.
Calculer la fréquence ν_z associée à ω_z.

Pour stabiliser la trajectoire de ces électrons, on superpose au champ électrostatique précédent un cham magnétique uniforme, indépendant du temps, parallèle à Oz, $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{u}_z$.

4.1. Quel serait le mouvement de l'électron, de vitesse initiale $\vec{V}_0$ sous l'action du seul champ $\vec{B}_0$? O introduira la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$. Calculer le rayon ρ_c de la trajectoire cyclotronique dar le cas où $\vec{V}_0 \perp \vec{B}_0$.

Application numérique :
L'énergie cinétique de l'électron est $E_c = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ eV ; $B_0 = 0{,}55$ T.
Calculer la fréquence ν_c associée à ω_c, ainsi que ρ_c.

4.2. On se préoccupe maintenant du mouvement de l'électron sous l'action de $\vec{E}(x, y, z)$ et $\vec{B}_0$. Écrire le nouvelles équations de mouvement. Montrer que le mouvement suivant Oz n'est pas modifié par rap port à la question 3.

4.3. On étudie le mouvement projeté sur le plan (xOy). L'action de $\vec{B}_0$ fait apparaître un « couplage » entr les deux équations sur Ox et sur Oy ; on pose $\rho = x + iy$ et on cherche les solutions du typ $\rho = \rho_0 \cdot e^{i\omega t}$. Montrer que l'équation aux pulsations a deux solutions : l'une, voisine de ω_c, l'autre notée ω_m et appelée pulsation « magnétron », qu'on exprimera en fonction de ω_z et ω_c. Montrer qu' chacune de ces pulsations est associée une trajectoire circulaire de l'électron et calculer la valeur ρ_m du rayon de la trajectoire circulaire associée à la pulsation magnétron, pour un électron de vitesse V_0.

Application numérique :

Calculer la fréquence magnétron ν_m et le rayon ρ_m avec les données précédentes. Comparer les troi fréquences ν_z, ν_c, ν_m.

4.4. On peut alors considérer le mouvement de l'électron, dans une première approche sommaire, comm résultant de la superposition des trois mouvements :

- entraînement ou dérive sur un cercle de rayon ρ_m à la fréquence magnétron dans xOy, ρ_m étant l rayon moyen calculé précédemment ;
- oscillations suivant Oz ;
- « rotation » cyclotronique de rayon ρ_c calculé précédemment. Donner sur un schéma l'allure de l trajectoire de l'électron. On ne respectera bien sûr ni l'échelle des fréquences, ni l'échelle de amplitudes.