PHYSIQUE II

Calculatrices autorisées.

Le ruissellement d'eau sur une surface est un phénomène très courant (Partie I) qui joue un rôle essentiel dans la formation de stalactites. Ainsi, sur la voûte d'une grotte où ruisselle une eau chargée en carbonate de calcium, des concrétions de calcaire appelées stalactites peuvent se former et croître à partir de la voûte (cf. figure 1) par précipitation du carbonate de calcium selon la réaction chimique :

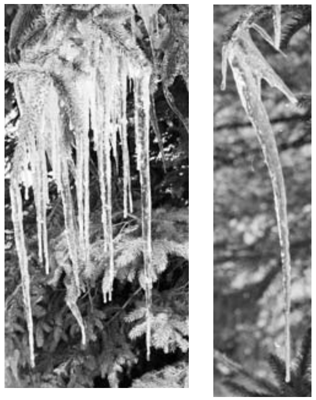
$$Ca^{2+} + 2HCO_3^- \rightleftharpoons CaCO_3(s) + CO_{2,aq}$$

Figure 1

La croissance de la stalactite est pilotée par la diffusion du dioxyde de carbone rejeté par la solution dans l'atmosphère (Partie II).

De même lorsque de l'eau de pluie ruisselle en hiver sur un garde-corps, on observe souvent la formation de stalactites de glace (figure 2). Après avoir étudié les conditions nécessaires à leur formation (Partie III) on étudie leur croissance pilotée par la diffusion thermique (Partie IV) et enfin on tente d'interpréter les ondulations de leur surface (Partie V).

Figure 2



Dans tout le problème, le référentiel terrestre est supposé galiléen, $\vec{e_Z}$ est un vecteur-unitaire orienté selon la verticale descendante et le champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{e_Z}$ est uniforme avec $g = 9,8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. On prendra garde à ne pas confondre $\vec{e_Z}$ et le vecteur unitaire $\vec{e_z}$ qui est introduit dans certaines parties pour repérer la direction perpendiculaire à l'écoulement.

Filière PC

Partie I - Ruissellement d'eau sur une stalactite

I.A - Étude d'un écoulement modèle

On étudie dans un premier temps un écoulement incompressible et stationnaire d'eau (masse volumique μ et viscosité dynamique η uniformes et constantes) sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale (cf. figure 3). On note h l'épaisseur du film liquide à l'abscisse x, supposée uniforme et constante et on cherche un champ des vitesses de la forme $\vec{u}(M) = u(x,z)\vec{e}_x$. On rappelle l'équation de Navier-Stokes qui pilote l'écoulement :

$$\mu\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}\,p + \eta\vec{\Delta}\vec{u} + \mu\vec{g}\,.$$

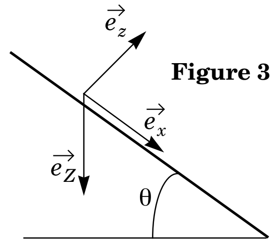


Figure 3

I.A.1) Montrer que $u(x,z)$ ne dépend pas de x. Comment se simplifient alors les expressions de $D\vec{u}/Dt$ et de $\vec{\Delta}\vec{u}$?

I.A.2) Expliciter la projection de l'équation de Navier-Stokes sur $\vec{e_z}$ et en déduire l'expression de la pression p en fonction de h, θ, z, μ, g et de la pression p_0 imposée par l'atmosphère à l'interface liquide-air.

I.A.3) Établir l'équation différentielle dont est solution $u(z)$ et en déduire son expression en fonction de z, g, θ de la viscosité cinématique $\nu = \eta/\mu$ et de deux constantes d'intégration.

I.A.4) Quelle est la condition aux limites imposée par le plan incliné en $z = 0$? On néglige la viscosité de l'air. En considérant un élément de surface dS de l'interface eau-air sans masse, justifier la condition aux limites :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{(z=h)} = 0\,.$$

I.A.5) Achever la détermination de $u(z)$ en fonction de θ, g, $\nu = \eta/\mu$, z et h.

I.A.6) En déduire que le débit volumique pour une profondeur b selon $\vec{e_y}$ vaut :

$$q = \frac{g\sin\theta h^3 b}{3\nu} \qquad (1)$$

I.B - Application aux stalactites

On étudie désormais l'écoulement d'eau le long d'une stalactite réelle d'axe OZ et de rayon $R(Z)$ pour laquelle on peut définir un angle $\theta(Z)$ local (cf. figure 4) sur des échelles de temps telles que la croissance de la stalactite est imperceptible : $R(Z)$ et $\theta(Z)$ ne dépendent pas du temps.

Du fait que $h(Z) \ll R$ et que R et θ varient doucement avec Z, on peut exprimer le débit volumique $q(Z)$ à travers le plan de cote Z à l'instant t en utilisant l'expression (1) établie en I.A.6) en y remplaçant b par $2\pi R(Z)$.

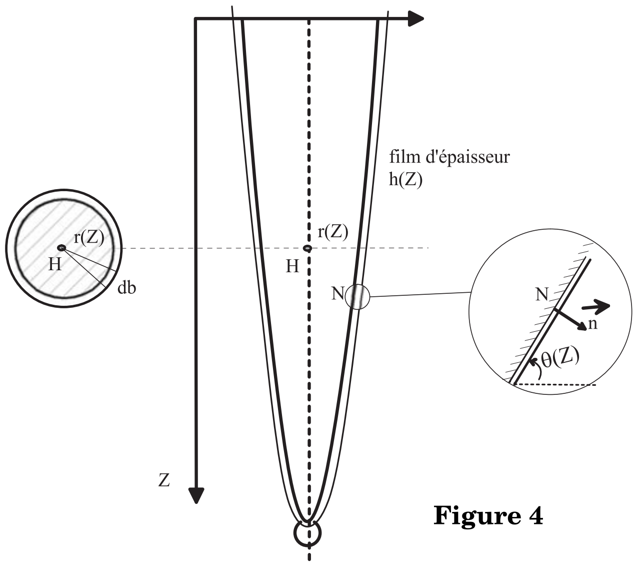


Figure 4

I.B.1) À quel endroit de la stalactite l'expression de $q(Z)$ ainsi obtenue est-elle erronée ?

I.B.2) Le débit $q(Z=0) = q_0$ en haut de la stalactite est supposé indépendant du temps. Proposer une méthode de mesure expérimentale de q_0.

I.B.3) Montrer que l'épaisseur du film h est de la forme :

$$h = l_c^{4/3}(R\sin\theta)^{-1/3} \qquad (2)$$

où l_c est une longueur caractéristique qu'on exprimera en fonction de q_0, g, ν.

I.B.4) Pour une stalactite de calcaire on prend $q_0 = 50\ \mathrm{mL \cdot h^{-1}}$, $R_0 = R(Z=0) = 5\mathrm{cm}$ et $\theta(Z=0) = \pi/2$. La viscosité cinématique de l'eau vaut $\nu = 10^{-6}\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. Calculer l_c, $h_0 = h(Z=0)$ et la vitesse moyenne $u_m(Z=0)$ définie comme la vitesse d'un écoulement uniforme qui aurait le même débit volumique.

I.B.5) Expliciter un nombre de Reynolds associé à cet écoulement en adoptant h_0 comme distance caractéristique. Le calculer numériquement avec les valeurs de la question I.B.4. Commenter.

I.B.6) Le modèle n'est valable que si $h/R < 10^{-1}$. Quelle condition numérique en déduit-on sur R ?