Les calculatrices sont autorisées

***

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations des énoncés et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question traitée.

***

Le sujet comporte 12 pages

PROBLEME A : L'ENTROPIE DANS LE SYSTEME RESPIRATOIRE

ETUDE D'UN ECOULEMENT DANS UN TUYAU CYLINDRIQUE
ETUDE LOCALE

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide incompressible de viscosité η et de masse volumique ρ dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe Oz, de longueur L et de rayon R. Cet écoulement unidirectionnel est caractérisé dans un repère cylindrique $\left(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z\right)$ par un champ de vitesse $\vec{v}=v(r,\theta,z,t)\vec{e}_z$ qui vérifie l'équation de Navier-Stokes,

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\ v^2+\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right)=-\overrightarrow{grad}P+\eta\Delta\vec{v}$$

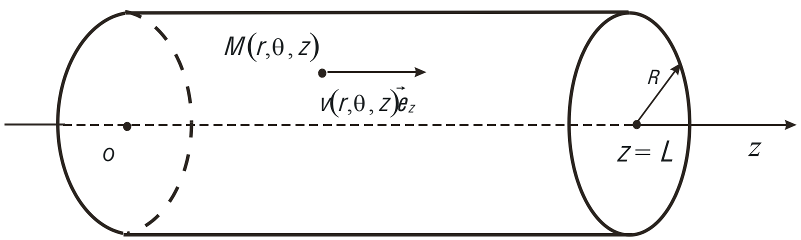


Figure 1

P représente la pression et on note : $P(z=0)=P_0$ et $P(z=L)=P_L$.
On néglige les phénomènes de pesanteur.

A.1. Justifier que le champ de vitesse est indépendant de θ.

A.2. Rappeler dans le cas général, l'équation locale de conservation de la matière.

Que devient cette relation dans le cas d'un fluide incompressible ?

En déduire que le champ de vitesse ne dépend pas de z.

A.3. Quelle propriété présente le champ de vitesse dans le cas d'un écoulement stationnaire ?
On étudie maintenant un écoulement stationnaire.

A.4. En projetant l'équation de Navier-Stokes dans la base cylindrique, montrer que P ne dépend que de z et établir une équation différentielle reliant $v(r)$, r et $\frac{dP}{dz}$.

Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques sont données à la fin du sujet.

A.5. Etablir l'expression de $P(z)$ en fonction de P_0, P_L, z et L.

A.6. En déduire que le champ de vitesse s'écrit $v(r)=\frac{1}{4\eta}\frac{P_0-P_L}{L}\left(R^2-r^2\right)$ sachant que la vitesse en $r=0$ est bornée.

Tracer le profil de la vitesse $v(r)$ en fonction de r.

Préciser la valeur maximale v_{max} de la vitesse.

ECOULEMENT STATIONNAIRE
ETUDE GLOBALE

On s'intéresse toujours à l'écoulement d'un fluide incompressible de viscosité η et de masse volumique ρ dans un tuyau cylindrique horizontal d'axe Oz de longueur L et de rayon R. On désire retrouver le champ de vitesse précédent à partir d'un bilan.
On s'intéresse à une portion de liquide (représentée en grisé sur la figure 2) contenue dans un cylindre de rayon r $(r<R)$, compris entre les plans $z=0$ et $z=L$. On rappelle que sur la surface latérale de ce cylindre de rayon r s'exerce une force de viscosité parallèle à Oz et dont la norme est $\left\|\vec{F}\right\|=S\eta\left|\frac{\partial v_z(r)}{\partial r}\right|$, où S est la surface latérale du cylindre et v_z la vitesse du liquide. On note $P(z=0)=P_0$ et $P(z=L)=P_L$. On néglige les phénomènes de pesanteur.

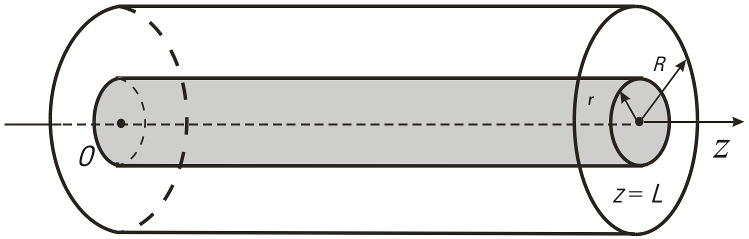


Figure 2

A.7. Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur le cylindre de rayon r.

A.8. On rappelle que la vitesse ne dépend que de r. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au petit cylindre en régime permanent, déduire une équation différentielle de la forme $\frac{dv}{dr} = k.r$ où k s'exprime en fonction de L, P_0, P_L, μ et η.

Retrouver le champ de vitesse $v(r)$ précédent.

RESISTANCE HYDRAULIQUE

A.9. Calculer le débit volumique Q dans la conduite. On l'exprimera sous la forme $Q = K(P_0 - P_L)$, connue sous le nom loi de Poiseuille. Calculer la constante K.

En déduire la vitesse moyenne, v_{moy} en fonction de L, P_0, P_L, μ et η.

La comparer à la vitesse maximale, $v_{\max}$.

A.10. On définit R_{Hy}, résistance hydraulique de longueur L et de surface S, par la relation $P_0 - P_L = R_{Hy}Q$.

Exprimer R_{Hy} en fonction de L, R et η. Quelle est l'analogie avec la définition de la résistance électrique ?

A.11. Comment varie la résistance hydraulique R_{Hy} avec le rayon R ?

Comparer ce résultat avec la résistance électrique d'un barreau de longueur L de section $S = \pi R^2$ et de conductivité électrique σ. Justifier qualitativement la différence.

A.12. La loi de Poiseuille n'est valable que pour un **écoulement laminaire**.

Rappeler la signification du terme en gras.

En déduire une inégalité sur le rayon R pour que le calcul soit valable si on prend une vitesse moyenne $v_{moy} = 0{,}1 m/s$, une viscosité dynamique $\eta = 10^{-3}$ Pa·s et une masse volumique $\rho = 10^3$ kg·m^{-3}.

ASSOCIATION DE RESISTANCES HYDRAULIQUES

A.13. On associe deux cylindres A_1 et A_2 (figure 3) de résistances hydrauliques R_{Hy1} et R_{Hy2} de même section S. L'un est compris entre $x_0 = 0$ et $x_1 = L_1$, le second est compris entre $x_1 = L_1$ et $x_2 = L_1 + L_2$. On note P_0, P_1 et P_2 les pressions pour $x_0 = 0$, $x_1 = L_1$, $x_2 = L_1 + L_2$. On néglige les pertes de charges au niveau du raccordement.

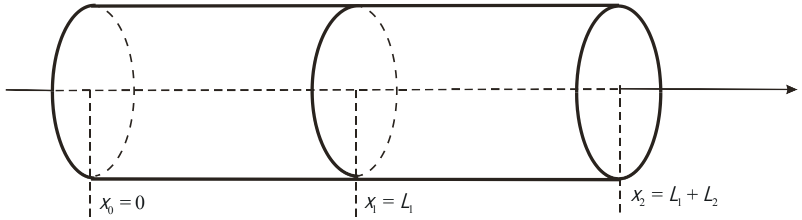


Figure 3

a) Établir l'expression de la résistance hydraulique R_{Hy} (qu'on définit bien sûr par la relation : $P_0 - P_L = R_{Hy}Q$) de l'ensemble en fonction de R_{Hy1} et R_{Hy2}.
Indiquer, en la justifiant, une analogie avec un problème d'électrocinétique.

b) En déduire la pression P_1 en fonction de P_0, P_2, R_{Hy1} et R_{Hy2}.

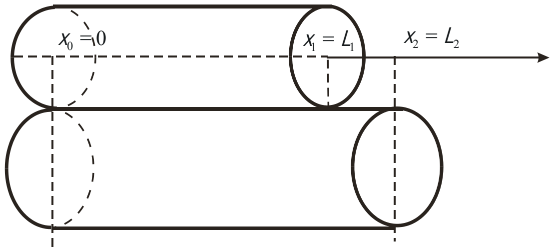


Figure 4

A.14. Les deux cylindres A_1, de section S_1 et de longueur L_1 et A_2 de section S_2 et de longueur L_2 sont associés en « parallèle » (figure 4). On note P_0, la pression sur les faces d'entrée pour $x_0 = 0$ et P_1, la pression sur les faces de sorties ($x_1 = L_1$ pour A_1, et $x_2 = L_2$ pour A_2).

Etablir l'expression de la résistance hydraulique de cette association en raisonnant par analogie avec l'électrocinétique.
En déduire le débit Q_1 dans le cylindre A_1 de section S_1 en fonction du débit total Q, R_{Hy1} et R_{Hy2}.

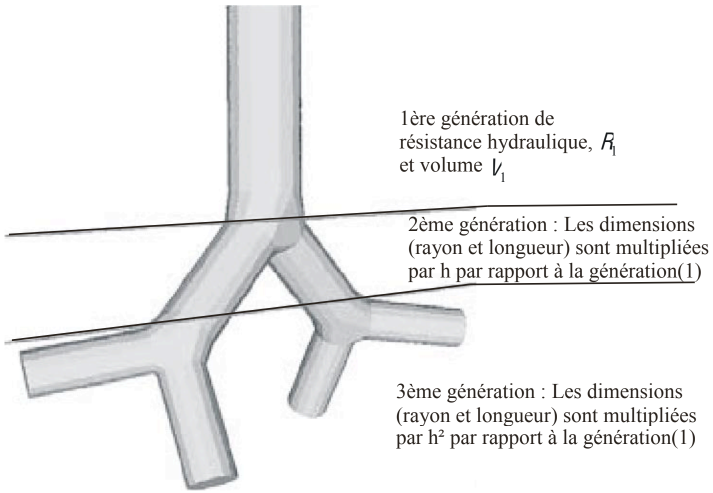
A.15. Rappeler l'expression de la puissance électrique dissipée dans une résistance électrique R traversée par un courant d'intensité I. Par analogie, déterminer la puissance dissipée par les forces de viscosité en fonction de R_{Hy} et Q.

L'ARBRE BRONCHIQUE ET L'ENTROPIE

Dans un arbre bronchique, les voies respiratoires se divisent par dichotomie avec une réduction systématique de la longueur et du diamètre. Dans le problème, nous allons supposer que la trachée se divise en deux bronches. Chacune d'elle se divise à son tour en deux autres, et ainsi de suite. Nous notons générations les différentes subdivisions qui seront indicées par les nombres successifs, p : la trachée est la génération $p=1$, les bronches, $p=2$, et ainsi de suite. Nous nous plaçons en régime permanent et l'air est assimilé à un fluide de viscosité η.

Une bronchiole de génération p est assimilée à un cylindre de rayon r_p et de longueur l_p. Nous admettrons que la loi de Poiseuille établie précédemment reste valable (en particulier entre $p=6$ et $p=16$).

A chaque génération, chaque dimension (rayon et longueur) est multipliée par une constante h que l'on supposera identique pour les deux dimensions.



A.16. Déterminer le nombre $N(p)$ de bronchioles à la $p^{\text{ième}}$ génération en fonction de p.

A.17. Déterminer le rayon r_p et la longueur l_p de la bronchiole de génération p en fonction de p, h, r_1 et l_1, valeurs pour $p=1$.

A.18. Calculer le volume V_p d'une bronchiole de génération p en fonction de V_1, h et p. En déduire le volume total V_{pt} de la génération p. On posera $X=2h^3$.

Montrer que le volume de l'arbre supposé contenir n générations est $V_t = V_1 \dfrac{1-X^n}{1-X}$.

A.19. Calculer la résistance hydraulique R_p d'une bronchiole de génération p en fonction de R_1 (résistance hydraulique pour $p=1$) et p. En déduire la résistance hydraulique R_{tp} totale de la génération p.

Déterminer la résistance hydraulique R_t de l'arbre supposé contenir n générations.

A.20. Montrer que le volume total diverge quand $n \to \infty$ lorsque la constante h est supérieure à une valeur critique h_c dont on précisera la valeur numérique.

A quelle condition sur h, la résistance hydraulique diverge-t-elle ?

La puissance thermique cédée à l'environnement assimilé à un thermostat de température T, est due à la puissance des forces de viscosité.

A.21. En utilisant la loi de Poiseuille, calculer la puissance thermique cédée par un arbre bronchique ayant n générations en fonction de Q_1, débit à la génération 1, R_1, X et n.

A.22. A partir d'un bilan d'entropie entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$, établir l'expression σ de l'entropie créée par unité de temps pour cet écoulement unidimensionnel en régime permanent.

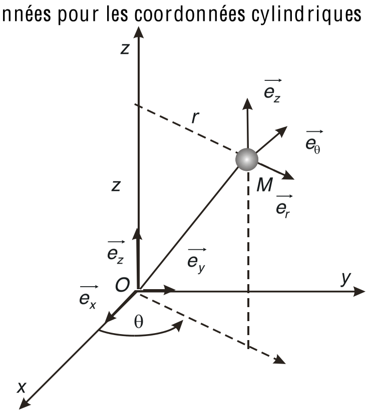
A.23. Exprimer l'entropie créée $\sigma_v = \dfrac{\sigma}{V_t}$ par unité de temps et de volume dans un arbre bronchique ayant n générations en fonction de T, Q_1, R_1, X et n. Montrer que ce terme diverge quand $n \to \infty$ si $h < h_c$. Conclure pour l'homme où $h = 0,85$.

Il est à remarquer que cette application au système pulmonaire n'est pas exacte puisque le flux n'est pas stationnaire mais pulsé.

FIN DU PROBLEME A

ANNEXES

Données pour les coordonnées cylindriques



$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z}$$

$$\Delta(f(r)) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)$$

$$\overrightarrow{grad}\left[f(r,\theta,z)\right] = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

Fin de l'énoncé