PROBLEME II - ETUDE D'UNE TURBINE PELTON

I- Questions préliminaires

L'espace à trois dimensions est muni d'une base orthonormée ($\vec{x},\vec{y},\vec{z}$) et on désignera par (x,y,z) les coordonnées d'un point M quelconque de l'espace. Dans tout le problème, $\vec{z}$ désignera l'axe vertical ascendant. On rappelle que l'équation d'un fluide en mouvement, lorsque les effets liés à la viscosité ne sont pas pris en compte (écoulement parfait) est donnée par :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P + \vec{g}$$

I-1- Interpréter physiquement le terme $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ et en donner son expression analytique en coordonnées cartésiennes. On pourra noter le vecteur vitesse de la façon suivante : $\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

On peut montrer que l'expression de $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ *en un point M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) et à l'instant t peut s'écrire :*

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}V^2 + \overrightarrow{rot}\vec{V} \wedge \vec{V}$$

I-2- On se place maintenant dans le cas de l'écoulement permanent d'un fluide incompressible. Après avoir défini les termes `écoulement permanent' et `fluide incompressible' et en précisant clairement où interviennent les deux hypothèses précédentes, montrer que :

$$\overrightarrow{grad}(P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z) = \rho\vec{V} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{V}$$

I-3- L'écoulement est maintenant supposé irrotationnel.
- Quel théorème en déduit-on ? En donner sa formulation.
- Quelle différence y a t-il lorsque l'écoulement est rotationnel ?
- Citer un exemple d'écoulement rotationnel.

I-4- Donner la signification physique de la quantité $P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z$.

On notera désormais la quantité $H = \frac{1}{\rho g}(P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z)$, *charge du fluide exprimée en mètres de colonne de fluide.*

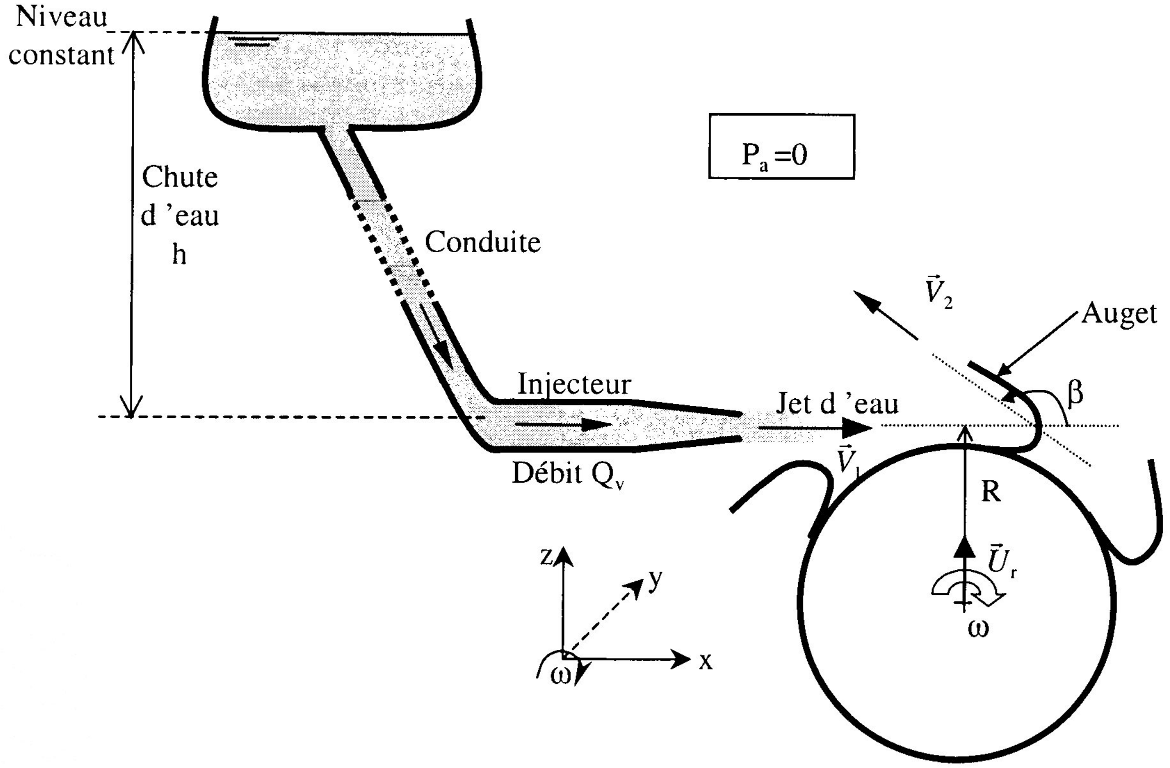
I-5- L'écoulement étant toujours supposé irrotationnel, on considère un tube de courant dans lequel circule un débit Q_V. Montrer que la puissance hydraulique disponible sur ce tube de courant peut s'écrire

$$P_h = \rho g H Q_V$$

II- Etude d'une turbine Pelton

On considère une turbine Pelton, dispositif couramment utilisé par EDF pour convertir l'énergie hydraulique (apportée par les barrages ou bien les conduites forcées) en énergie mécanique. Ce type de turbine est utilisé pour entraîner un alternateur afin de produire de l'énergie électrique. La roue Pelton est un ensemble mobile comportant sur sa périphérie des augets destinés à capter un jet d'eau libre fourni par un injecteur. Cet injecteur est relié par l'intermédiaire d'une conduite à une chute d'eau (voir figure). La dénivellation entre la surface libre du réservoir amont et l'injecteur est notée h. Le jet d'eau, sortant de l'injecteur, supposé cylindrique de rayon r (section S), de débit Q_V, entraîne ainsi la roue en rotation sur son axe. L'ensemble de l'installation, à partir de la sortie de l'injecteur, est baigné par la pression atmosphérique P_a. Par souci de simplification, on prendra $P_a=0$.

On notera ω la vitesse angulaire de la roue et R le rayon moyen de cette même roue au niveau des augets. On supposera que l'auget provoque une déviation du jet d'eau d'un angle β entre l'entrée et la sortie, comme l'indique la figure.



On désignera par $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{y})$ la base des coordonnées cylindriques.

On considérera que le rayon r *du jet est faible devant le rayon* R, *c'est à dire qu'aucune variation sur le diamètre du jet ne sera considérée.*

On désigne par $\vec{V}_1$ *la vitesse absolue du fluide en entrée de roue mobile par rapport au sol fixe.* $\vec{V}_2$ *désigne la même quantité en sortie et* $\vec{U}$ *la vitesse tangentielle de la roue au niveau de l'auget.*

Soit $\vec{W}_1$ la vitesse relative du fluide par rapport à la roue mobile en entrée et $\vec{W}_2$ la vitesse relative du fluide par rapport à la roue mobile en sortie.
L'étude sera menée dans un référentiel lié à l'auget, qui sera considéré comme galiléen. Ce référentiel sera supposé en translation par rapport au référentiel lié au sol, pendant toute la durée de l'impact du jet sur l'auget.

On se propose, dans un premier temps, d'étudier le comportement individuel d'un auget.

II-1- En notant ρ la masse volumique de l'eau, déterminer la masse élémentaire dm d'eau admise dans l'auget pendant une durée dt ainsi que le débit volumique Q_{vr} atteignant effectivement l'auget dans son mouvement.

II-2- On cherche à appliquer le théorème du moment cinétique à la masse de fluide dm transitant par la roue mobile pendant la durée dt. Pour cela, on utilisera la base des coordonnées cylindriques.

Dans toute la suite du problème, on négligera les dimensions de l'auget par rapport à celle de la roue.

II-2-1- Appliquer la relation de composition des vitesses afin de déterminer $\vec{V}_1$ en fonction de $\vec{W}_1$ et $\vec{U}$ puis ensuite $\vec{V}_2$ en fonction de $\vec{W}_2$ et $\vec{U}$.

II-2-2- Ecrire le moment cinétique au centre de la roue de la masse dm entrant dans l'auget en fonction de dm, R, du vecteur unitaire $\vec{U}_r$ et de la vitesse relative $\vec{W}_1$. On laissera l'expression sous la forme d'un produit vectoriel.
On effectuera le même travail en sortie de l'auget. Le moment cinétique sera exprimé en fonction de dm, R, $\vec{U}_r$, et de la vitesse relative $\vec{W}_2$. On laissera également l'expression sous forme d'un produit vectoriel.

II-2-3- Après avoir énoncé le théorème du moment cinétique, montrer que le couple $\vec{C}$ exercé par le fluide sur la roue est donné par :

$$\vec{C} = \rho Q_{VR} R \vec{U}_r \wedge (\vec{W}_2 - \vec{W}_1)$$

II-2-4- En considérant le fluide dans son mouvement relatif par rapport à l'auget, montrer que

$$\|\vec{W}_1\| = \|\vec{W}_2\|$$

Exprimer ensuite les produits vectoriels et montrer que le couple exercé par le fluide sur l'auget est donné par :

$$\vec{C} = \rho RS(-U + V_1)^2 (1 - \cos\beta)\vec{y}$$

où S est la section droite du jet incident. On prendra soin de justifier le signe de $\vec{C}$.

II-2-5- En déduire la puissance mécanique P_m cédée par le fluide à la roue mobile.

II-2-6- Déterminer le module de la vitesse $\vec{V}_1$ en sortie de l'injecteur en fonction de h, en négligeant les effets de la viscosité du fluide.
On exprimera ensuite la puissance hydraulique P_h disponible sur cette chute d'eau, notamment en fonction de h et du débit Q_V.

II-3- On appelle rendement hydraulique η de la turbine le rapport entre la puissance hydraulique cédée par le fluide à la turbine et la puissance hydraulique disponible. Ces puissances sont prises en valeurs absolues.

- Exprimer η exclusivement en fonction de $\cos\beta$ et x, où x désigne le rapport U/V_1.
- Quelles sont les conditions à appliquer sur x et sur β pour que ce rendement soit alors maximum ?
- Que vaut alors ce rendement maximum ?

En réalité, la roue Pelton comporte une multitude d'augets (une trentaine en général). Les augets se succèdent donc régulièrement dans une même zone. On peut ainsi considérer que tout le débit Q_V du jet incident est capté par les augets.

II-4- Justifier rapidement que le couple exercé par le fluide sur l'ensemble de la roue mobile est donné par

$$\vec{C} = \rho Q_V R(-U + V_1)(1 - \cos\beta)\vec{y}$$

II-5- Exprimer de nouveau le rendement hydraulique η en fonction de $\cos\beta$, et x.
- Donner les conditions à appliquer sur x et sur β pour que ce rendement soit alors maximum.
- Que vaut alors ce rendement ?
- Dans la pratique, il n'est pas possible de remplir la condition sur β pour obtenir un rendement maximum. Pourquoi ?
- En réalité, le rendement total de la turbine est nettement inférieur à la valeur trouvée précédente. Essayer d'en donner les raisons.

II-6- Le rendement de la turbine au point nominal de fonctionnement est de 80%. On donne pour ces conditions de rendement

$$Q_V = 12 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$N = 208 \text{ tours/minute}$$

On prendra R = 1 m et h = 300 m
Calculer la vitesse V_1 en sortie d'injecteur ainsi que la puissance mécanique disponible sur la turbine. Déterminer ensuite la valeur de l'angle β.

III- Etude du démarrage et de l'arrêt de la turbine

La turbine entraîne un alternateur, machine destinée à produire de l'électricité. Cette machine produit ainsi un couple résistant sur l'axe de la roue mobile, lorsqu'elle fonctionne . La masse de l'ensemble mobile est notée M et son moment d'inertie est $I=KMR^2$ (avec K constante inférieure à 1). R désigne comme précédemment le rayon moyen de la roue au niveau des augets.

En l'absence de tout couple résistant, c'est à dire lorsque l'alternateur est déconnecté, la turbine est calculée pour tourner à la vitesse angulaire maximale ω_m , telle que : $V_1=R\omega_m$, point pour lequel le rendement hydraulique est nul.
La turbine est initialement à l'arrêt : à l'instant t=0, on ouvre brutalement les vannes alimentant l'injecteur.

III-1- Donner l'expression du couple moteur C en fonction de ω et ω_m en utilisant l'expression déterminée à la question II-4.
Ecrire ensuite l'équation du mouvement de l'ensemble mobile.

III-2- Montrer que $\dfrac{\omega_m - \omega}{\omega_m} = e^{-\frac{t}{T}}$ où T est une constante de temps que l'on déterminera en fonction de $\cos\beta$, ρ, Q_V, M et K exclusivement.

III-3- Déterminer l'expression du temps t_1 nécessaire à l'ensemble mobile pour atteindre la moitié de la vitesse angulaire maximale ω_m.
Pour l'application numérique, on prendra M=300 tonnes, $Q_V=12$ m^3/s, K=0,64 et $\beta=165°$.

L'alternateur est maintenant mis en marche et le couple résistant ainsi généré fait que la vitesse angulaire de la turbine est $\omega_1=\omega_m/2$.

III-4- Le couple résistant dû au fonctionnement de l'alternateur est brutalement annulé suite à une déficience électrique. La turbine, qui n'est plus freinée par le couple résistant, a donc tendance à s'emballer vers sa vitesse angulaire maximale ω_m.
- Pourquoi avoir choisi le régime de fonctionnement précédemment défini ?
- Déterminer l'expression du temps t_2 au bout duquel la vitesse angulaire est majorée de 50%.
- Quels sont les risques liés à une telle situation ?

III-5- Au temps t_2, la turbine tourne ainsi à une vitesse angulaire ω_2 supérieure de 50 % à la vitesse ω_1. Le débit injecté est alors noté Q_{V0}. Pour éviter l'emballement, l'ingénieur responsable du site envisage de fermer la vanne d'alimentation de l'injecteur. La fermeture d'une telle vanne n'est évidemment pas instantanée, mais doit s'opérer pendant un temps T'.

III-5-1- Déterminer la loi de débit Q_V pendant l'opération de fermeture en fonction de Q_{V0},t, T'. On supposera une loi de fermeture du débit linéaire en fonction du temps.

III-5-2- En s'inspirant de la question III-1, montrer que la nouvelle équation différentielle reliant ω à t s'écrit:

$$\frac{d\omega}{\omega_m - \omega} = \frac{1}{T}(1 - \frac{t}{T'})dt$$

Intégrer ensuite cette équation différentielle pour déterminer $\frac{\omega_m - \omega}{\omega_m - \omega_2}$ en fonction du temps t, de T et de T'.

III-5-3- Quelle sera l'augmentation relative de la vitesse angulaire au bout du temps de fermeture T'. On demande l'expression et l'application numérique avec T'=30s.
Conclure.

Fin de l'énoncé.