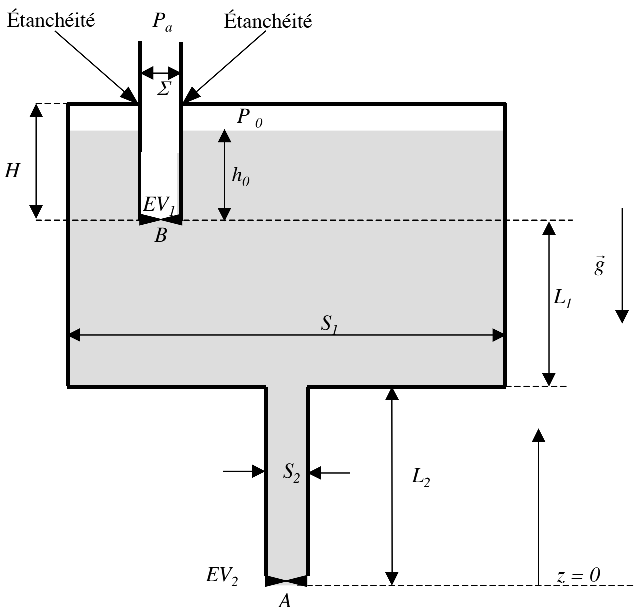
PROBLEME II - VIDANGE D'UN RESERVOIR

La partie I est indépendante des parties II et III.

Rappel d'analyse vectorielle :
$div\left(f\vec{u}\right) = f div\left(\vec{u}\right) + \vec{u}.\overrightarrow{grad}\left(f\right)$ avec f fonction scalaire et $\vec{u}$ vecteur quelconque.

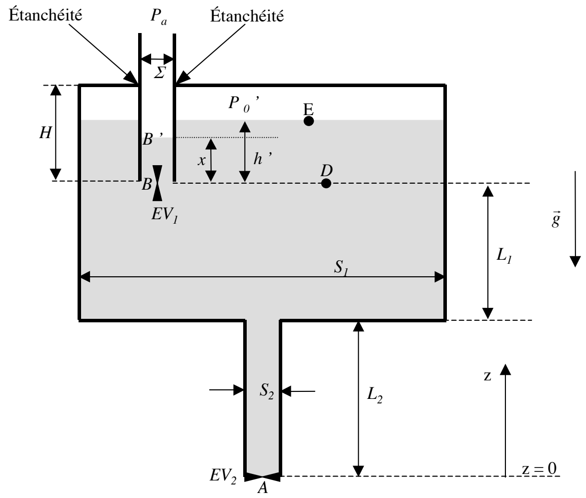
On considère un grand réservoir de section cylindrique S_1. Ce réservoir hermétiquement fermé, contient de l'eau (masse volumique ρ), que l'on assimilera à un fluide parfait, emprisonnant ainsi un matelas d'air à la pression P_0. L'air emprisonné sera assimilé à un gaz parfait.
Un tube plongeur, de section Σ, immergé dans l'eau jusqu'à la profondeur h_0, est relié à l'extérieur où règne la pression atmosphérique P_a. Une étanchéité parfaite est réalisée entre le couvercle du réservoir et le tube plongeur. L'extrémité du tube plongeur est munie d'une électrovanne EV_1, qui est initialement fermée (voir figure 1).
Un tube de vidange cylindrique, de longueur L_2 et de section S_2, est raccordé sur le fond du réservoir ; ce tube est muni d'une électrovanne EV_2 placée à son extrémité, débouchant à la pression atmosphérique P_a.



- Figure 1 - Etat initial : avant ouverture des vannes

I. Etude préliminaire

I.1. Les vannes EV_1 et EV_2 étant initialement fermées, calculer la pression P_B au point B en fonction de P_0 et h_0 en particulier.



- Figure 2 - Après ouverture de la vanne EV_1

I.2. A l'instant $t = 0$, l'électrovanne EV_1 est ouverte brusquement, EV_2 restant fermée.
On supposera que les conditions sont telles que $P_B > P_a$. Le liquide monte donc dans le tube plongeur pour passer de B à B', points séparés d'une hauteur x. Une nouvelle pression P_0' s'établit au dessus du liquide, ainsi qu'une nouvelle hauteur de la surface libre notée h' (voir figure 2).

I.2.1. Donner l'expression de P_0' en fonction de x, h' et P_a en particulier.

I.2.2. On pose $\varepsilon = \dfrac{\Sigma}{S_1}$. Ecrire une relation traduisant la conservation du volume d'eau en fonction des paramètres h_0 , h', x et ε. Que devient l'expression de $h_0 - h'$ à l'ordre 1 en ε quand $\varepsilon << 1$?

Dans toute la suite du problème on utilisera la relation simplifiée à l'ordre 1.

I.2.3. En supposant que la température de l'air emprisonné ne varie pas, écrire une relation faisant intervenir les paramètres H, h', h_0 , P_0 et P_0'.

I.2.4. Exprimer la pression P_0' en fonction de P_0 , ε, H, h_0 et x.

Montrer que cette expression peut se mettre sous la forme : $P_0' = P_0\left(1 - \varepsilon \dfrac{x}{H - h_0}\right)$

Donner en fonction de P_a , x, h_0 et ε en particulier, l'expression de la pression P_0'.

I.2.5. Déterminer en fonction de P_0 , P_a , H, h_0 , ε, ρ et g , l'expression de x en adoptant toujours le premier ordre en ε .

Tournez la page S.V.P.

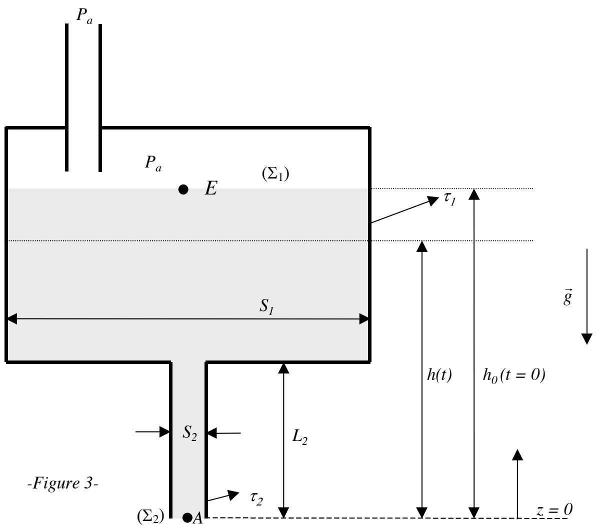
I.3. On supposera désormais que $P_a > P_B$ avant l'ouverture de la vanne EV_1.
Que se passe t-il dès l'ouverture de la vanne EV_1 ?
A l'équilibre, donner la valeur de x et de la pression P_B.
Déterminer l'expression de la nouvelle pression d'équilibre P_0' au-dessus du fluide en fonction de P_a et h_0 en particulier.

I.4. On se place toujours dans le cas $P_a > P_B$. La vanne EV_2 est maintenant ouverte. On attend l'établissement du régime permanent de l'écoulement dans tout le volume de fluide. Les répartitions de vitesse du fluide dans les sections S_1 et S_2 sont supposées uniformes. La vitesse de la surface libre sera notée V_E, et celle dans la section S_2 sera notée V_A, A appartenant à la section de sortie S_2 (voir figure 2). On supposera de plus que le niveau de l'eau reste toujours au-dessus du niveau de B.
Ecrire une relation entre les vitesses V_A, V_E et des données d'ordre géométrique.
Ecrire une relation liant V_D et V_A, où D est un point au même niveau que B.

En déduire que la vitesse en A s'exprime sous la forme : $V_A = \left(\dfrac{2g\left(L_1 + L_2\right)}{1 - f\left(\dfrac{S_2}{S_1}\right) g(\varepsilon)} \right)^{1/2}$

où f et g sont deux fonctions que l'on déterminera.
Que devient cette expression lorsque ε tend vers zéro et $S_2/S_1 << 1$? Quel résultat connu retrouve-t-on ?

II. Vidange du réservoir



-Figure 3-

La surface libre du réservoir est maintenant directement reliée à l'atmosphère (voir figure 3). La vanne EV_2 est ouverte et le régime permanent est supposé atteint instantanément. Le volume instantané de fluide contenu dans le réservoir est désigné par τ_1, et celui contenu dans le tube de vidange de longueur L_2 par τ_2. On supposera de plus que $S_1 >> S_2$.

II.1. En supposant un régime quasi-stationnaire, déterminer l'expression de la vitesse au point A en fonction de V_E et $h(t)$.

II.2. Exprimer le rapport V_E/V_A.
Quelle condition doit-on appliquer sur les diamètres D_2 et D_1 (diamètres respectifs des sections S_2 et S_1) pour que V_E n'excède pas 1% de V_A.
Donner alors l'expression de V_A dans ces conditions.
Cette relation sera vérifiée dans toute la suite du problème.

II.3. Pour $h_0 > L_2$, écrire l'équation différentielle vérifiée par la hauteur $h(t)$.

II.4. Dans les mêmes conditions que précédemment, donner l'expression de h en fonction du temps et déterminer le temps t_1 au bout duquel le volume τ_1 a été vidé.
Calculer V_A et t_1. Données : $S_2/S_1 = 1/100$, $L_2 = 1$ m, $h_0 = 2$ m, $g = 9{,}81\ ms^{-2}$.

III- Théorème de Bernoulli en régime instationnaire.
On rappelle l'équation locale de l'écoulement parfait d'un fluide (équation d'Euler) :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}} V^2 + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}\right) \wedge \left(\vec{V}\right) = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{g}$$

où $\vec{g}$ désigne le champ de pesanteur, $\vec{V}$ le vecteur vitesse et P la pression.

Le fluide est, de plus, supposé incompressible et l'écoulement irrotationnel, mais l'écoulement est non permanent.

III.1. Ecrire, dans ces conditions, l'équation de continuité.
Montrer, en précisant bien toutes les hypothèses, que l'équation d'Euler se ramène à :

$$\frac{\rho}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial t} + \vec{V}.\overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho g H\right) = 0$$

où H désigne la quantité $\dfrac{P}{\rho g} + \dfrac{V^2}{2g} + z$, appelée charge du fluide.
Cette dernière équation constitue l'expression du théorème de Bernoulli en régime non permanent.

III.2. Soit la surface fermée $\Sigma(t)$, de volume $\tau(t)$, variable dans le temps.
En intégrant l'expression du théorème de Bernoulli en régime non permanent sur le volume $\tau(t)$, montrer que :

$$\underbrace{\oiint_{\Sigma(t)} \rho g H \vec{V}.\vec{n} d\Sigma}_{I_1} + \underbrace{\iiint_{\tau(t)} \frac{\rho}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial t} d\tau}_{I_2} = 0$$

On se propose d'appliquer la relation précédente à l'établissement du régime de vitesse en A.
A l'instant t =0, la vanne EV_2 est ouverte de manière instantanée.
Dans toute la suite du problème, le volume $\tau(t)$ correspond au volume délimité par la surface $\Sigma(t)$ entourant entièrement et exclusivement les volumes $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$.

III.3. Evaluation du terme I_1

III.3.1. Montrer que l'intégrale bilan I_1 se ramène à : $I_1 = \iint_{\Sigma_1} \rho g H \vec{V}.\vec{n} d\Sigma + \iint_{\Sigma_2} \rho g H \vec{V}.\vec{n} d\Sigma$ où Σ_1 et Σ_2 désignent les 2 surfaces libres du fluide (voir figure 3).

En déduire que $I_1 = \rho g V(t) S_2 \left(H(A) - H(E) \right)$ où $V(t)$ désigne la vitesse en A durant le régime d'établissement.

III.3.2. Donner les expressions de la charge du fluide $H(E)$ au niveau de la surface libre et $H(A)$ au niveau de la sortie du tube de vidange.

Montrer que, si la vitesse de descente de la surface libre V_E est négligeable devant la vitesse en A, l'expression finale de I_1 s'écrit : $I_1 = \rho g V(t) S_2 \left(\frac{V^2(t)}{2g} - h(t) \right)$.

III.4. Evaluation du terme I_2

III.4.1. A quelle condition peut-on écrire : $\frac{\rho}{2} \iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{V}^2\right) d\tau \approx \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_\tau \vec{V}^2 d\tau \right)$

III.4.2. Dans toute cette question, la notation *[X]* désignera l'ordre de grandeur de la quantité *X*.

En admettant que : $\left[\iiint_\tau \vec{V}^2 d\tau \right] = [V]^2 [\tau]$, où τ est le volume de fluide considéré, montrer que :

$$\left[\iiint_\tau \vec{V}^2 d\tau \right] = \underbrace{V^2(t) \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 S_1 (h - L_2)}_{(A)} + \underbrace{V^2(t) L_2 S_2}_{(B)}.$$

Toujours en raisonnant sur les ordres de grandeur et en considérant que h et L_2 sont du même ordre de grandeur, montrer que *(B) >> (A)*.

En déduire que : $I_2 = \frac{\rho}{2} L_2 S_2 \frac{\partial V^2(t)}{\partial t}$.

III.5. Les intégrales I_1 et I_2 étant exprimées, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $V(t)$ en A est : $\frac{1}{V_A} \left(\frac{dV}{V_A - V} + \frac{dV}{V_A + V} \right) = \frac{dt}{L_2}$

où V_A est la vitesse en A, déterminée en régime stationnaire à la question II.2. On considérera que la vitesse V_A, correspondant au régime stationnaire, ne varie pas pendant le temps d'établissement du régime de vitesse en A.

III.6. En déduire l'expression de la vitesse $V(t)$ en A en fonction du temps et de L_2.

Représenter l'allure de $V(t)$ et dessiner l'asymptote.

III.7. Soit le temps $t_{0,99}$ au bout duquel la vitesse du fluide $V(t)$ en A vaut 99% de la vitesse du régime stationnaire V_A.

Montrer que $t_{0,99} = \frac{\alpha L_2}{V_A}$ où α est une constante que l'on calculera.

Calculer $t_{0,99}$ en prenant comme vitesse V_A la vitesse calculée à la hauteur h_0.

Calculer l'évolution de V_A durant le régime transitoire. L'hypothèse effectuée sur V_A en III.5. paraît-elle justifiée ?

Fin de l'énoncé