CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

PHYSIQUE 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées

Les deux problèmes sont indépendants. On fera l'application numérique chaque fois que cela est possible, en veillant à l'unité et aux chiffres significatifs du résultat.

***

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

***

PROBLÈME I
VOILE SOLAIRE

Ce problème traite de la possibilité de rallier l'orbite de Mars depuis l'orbite terrestre à l'aide d'une voile solaire. Les deux premières parties sont indépendantes.

I.1 Orbites héliocentriques

Le référentiel héliocentrique est considéré comme Galiléen. Le mouvement des astres y est décrit dans un repère de coordonnées polaires (r, θ) dont le Soleil occupe l'origine S. Les grandeurs vectorielles seront exprimées dans le repère orthogonal associé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ représenté sur la figure I.1. Le Soleil est assimilé à un corps parfaitement sphérique et son champ de gravité est donc un champ de force central. Tous les mouvements orbitaux de ce problème sont plans.

Données :

– masse du Soleil : $\mathcal{M}_S = 2,0 \times 10^{30}$ kg

– constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ m^3.s^{-2}.kg^{-1}

– célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8$ m.s^{-1}

– distance moyenne Terre-Soleil : $r_T = 1,5 \times 10^{11}$ m

– distance moyenne Mars-Soleil : $r_M = 2,3 \times 10^{11}$ m

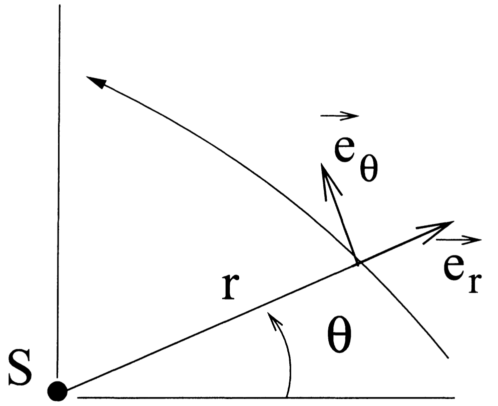

Figure I.1

- **I.1.1**
Rappeler l'expression générale de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ d'un corps ponctuel dans un repère de coordonnées polaires.

- **I.1.2**
Exprimer la force de gravitation $\vec{F}_S$ exercée par le Soleil sur un corps de masse m situé à distance r du centre de l'astre.
Citer deux grandeurs conservées lorsque le corps est soumis à la seule force de gravitation $\vec{F}_S$.

- **I.1.3**
Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un corps soumis à la seule force de gravitation $\vec{F}_S$ trouvée en I.1.2.
Calculer, en jours, la durée de révolution d'un corps suivant une orbite héliocentrique circulaire de rayon $r_M = 2,3 \times 10^{11}$ m.

- **I.1.4**
En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un corps soumis à la seule force de gravitation $\vec{F}_S$, montrer que dans le cas général, l'équation du mouvement pour la distance radiale $r(t)$ se réduit à :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\,t^2} = -E_p'(r(t))$$

où E_p' désigne la dérivée par rapport à r de l'énergie potentielle effective $E_p(r)$:

$$E_p(r) = \frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2} - \frac{\mathcal{G}\mathcal{M}_S m}{r}$$

Que représente la grandeur $\mathcal{L}$ dans l'expression ci-dessus ?

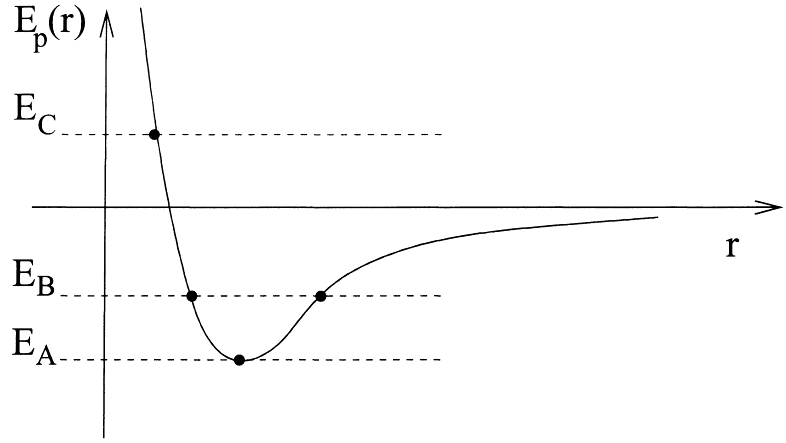

Figure I.2

- **I.1.5**

L'énergie potentielle effective $E_p(r)$ est représentée sur la figure I.2. Décrire qualitativement la nature des trajectoires suivies par des corps dont les énergies totales seraient respectivement égales à E_A, E_B et E_C schématisées par des lignes horizontales sur la figure.

I.2 Une voile solaire

Une voile solaire, supposée légère, est assimilée à une surface plane d'aire S, pourvue d'un revêtement réfléchissant, dont la fonction est de tirer profit de la pression de radiation associée au rayonnement lumineux du Soleil.

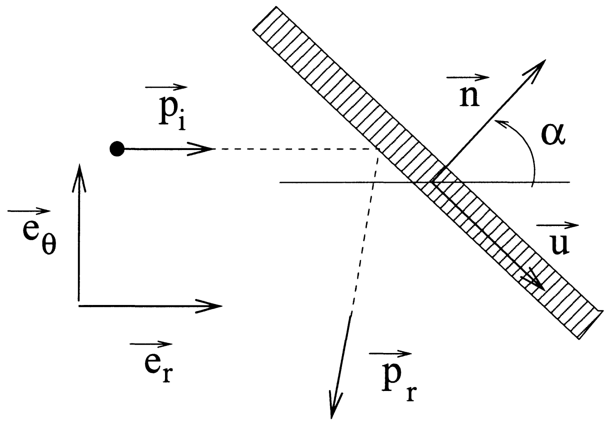

Figure I.3

- **I.2.1**

Une particule incidente de quantité de mouvement $\vec{p_i}$ subit une collision élastique sur la surface et repart avec une quantité de mouvement $\vec{p_r}$, située dans le plan d'incidence (qui coïncide avec le plan de la figure I.3). L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence α et les impulsions $\vec{p_i}$ et $\vec{p_r}$ sont égales en norme : $||\vec{p_i}|| = ||\vec{p_r}|| = p$.
Exprimer, en fonction de p et α, d'abord dans le repère $(\vec{u}, \vec{n})$ lié à la voile, puis dans le repère $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ lié à la direction de la particule incidente, la quantité de mouvement $\delta\vec{p}$ cédée à la surface par la particule réfléchie.

- **I.2.2**

La voile est plongée dans un flux de particules incidentes, dont les directions sont toutes parallèles entre elles, c'est-à-dire suivant la direction du vecteur $\vec{e_r}$ de la figure I.3. On appelle ϕ_i

le nombre de particules incidentes traversant une surface unité normale à la direction d'incidence $\vec{e}_r$ par unité de temps. Ces particules n'interagissent pas entre elles et subissent toutes la réflexion décrite à la question précédente. Un calcul simple montre que le nombre de particules N_i qui subissent la collision avec la voile solaire par unité de temps, est égal à :

$$N_i = \phi_i S \cos(\alpha)$$

Exprimer la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}/\Delta t$ transmise à la voile solaire par unité de temps.
En déduire la force moyenne $\vec{F}$ exercée par les particules incidentes sur la voile.
Exprimer $\vec{F}$ dans le repère $(\vec{u}, \vec{n})$, puis dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

- **I.2.3**
Les particules incidentes sont des photons. L'énergie E et la norme de la quantité de mouvement p d'un photon sont liées par la relation $E = pc$.
Etablir une relation entre le flux incident d'énergie lumineuse $\Phi = E\phi_i$ et le nombre de photons subissant la collision N_i, puis réexprimer la force $\vec{F}$ en fonction de Φ, α, S, c et $\vec{n}$.

- **I.2.4**
Comment faut-il orienter la voile solaire pour que la composante $F_\theta = \vec{F}.\vec{e}_\theta$ soit la plus grande possible ?
Calculer, en degrés, la valeur de l'angle α_m pour laquelle cette condition est réalisée.

- **I.2.5**
Calculer la valeur de l'accélération $a = F_\theta/m$ subie par une voile solaire de surface $S = 1000$ m^2, de masse $m = 100$ kg, inclinée de α_m, située au voisinage de l'orbite terrestre $(r = r_T)$ et recevant un flux incident de lumière égal à $\Phi = 1350$ W.m^{-2}.

I.3 Temps de transit

- **I.3.1**

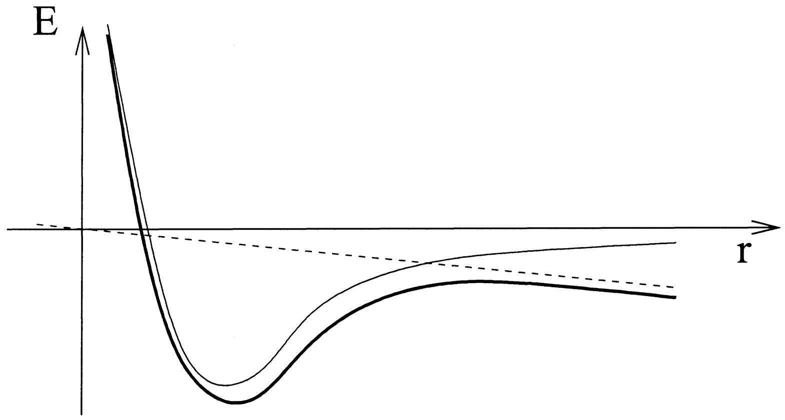

Figure I.4

On se place dans les conditions de la partie I.1, et on considère un corps suivant une orbite héliocentrique **circulaire** $r(t) = r_0$. A un instant donné, on exerce sur le corps une force supplémentaire $\vec{F} = F_r\vec{e}_r$ purement radiale, dirigée vers l'extérieur, et d'intensité constante très faible. Le potentiel associé à cette force radiale est représenté sur la figure ci-dessus (figure I.4) par une droite décroissante en traits pointillés. On cherche à déterminer la modification de trajectoire résultant de cette force supplémentaire.

L'énergie potentielle "radiale" totale, représentée en trait gras sur la figure ci-dessus résulte de l'addition de la fonction représentée en trait fin et de la droite en pointillé.
En s'appuyant sur ce schéma, **justifier** qu'une force purement radiale et de faible intensité n'est pas de nature à modifier de façon significative le rayon de l'orbite héliocentrique.

- **I.3.2**
On se place dans les conditions de la partie I.1, et on considère un corps suivant une orbite héliocentrique circulaire de rayon r_0. A un instant donné, on exerce sur le corps une force supplémentaire $\vec{F} = F_\theta \vec{e}_\theta$ purement orthoradiale, dirigée vers l'avant de la trajectoire, et d'intensité constante très faible.
Exprimer la variation temporelle de moment cinétique du corps par rapport au Soleil en fonction de F_θ et du rayon $r(t)$.

- **I.3.3**
Une voile solaire subissant la force calculée à la question I.2.4 se déplace autour du Soleil. On néglige désormais le terme $\mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}t^2$ dans la relation issue du principe fondamental de la dynamique, ainsi que l'effet de la composante radiale F_r de la force $\vec{F}$. On suppose aussi que l'orbite reste en permanence proche d'une orbite circulaire (c'est une spirale lentement croissante). Montrer qu'alors le rayon $r(t)$ de l'orbite s'accroît avec le temps, obéissant à l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = C r(t)^{3/2} \frac{F_\theta}{m}$$

où C est une constante que l'on déterminera.
Indication : on cherchera une relation entre $\mathcal{L}$ et r pour le cas d'une orbite circulaire.

- **I.3.4**
Dans le cas de la voile solaire, la force $\vec{F}$ provient de la pression de radiation, et dépend donc de la distance à l'astre r, à travers le flux d'énergie lumineuse $\Phi(r)$. Comment $\Phi(r)$ dépend-il de la distance au Soleil en l'absence de toute absorption d'énergie lumineuse de la part du milieu interplanétaire ?
Si le flux lumineux est de $\Phi(r_T) = 1350$ W.m^{-2} à distance $r_T = 1,5 \times 10^{11}$ m du Soleil, combien vaut-il à la distance de Mars $r_M = 2,3 \times 10^{11}$ m ?
Montrer que l'équation différentielle pour le rayon de l'orbite devient :

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = C' \frac{a}{\sqrt{r(t)}}$$

avec $a = F_\theta/m$ défini et calculé à la question I.2.5, et C' une autre constante à déterminer.

- **I.3.5**
Intégrer l'équation précédente et calculer le temps de transit t_{TM} nécessaire pour rallier à la voile solaire l'orbite de Mars ($r = r_M$), en partant de l'orbite terrestre ($r = r_T$), en ne considérant que la force de gravité du Soleil et la force de pression de radiation.
Indication : la solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{K}{\sqrt{r}}$$

entre les instants 0 *et t vérifie :*

$$r(t)^{3/2} - r(0)^{3/2} = \frac{3}{2} K t$$