MECANIQUE DU POINT, DU SOLIDE ET DES SYSTEMES

EXERCICES

M1 Tension d'un pendule simple

Un pendule simple (longueur l, masse m) est lancé à partir de sa position d'équilibre avec une vitesse initiale V_0 horizontale.

Déterminer les valeurs de V_0 permettant au fil de rester constamment tendu.

M2 Etude d'un équilibre relatif

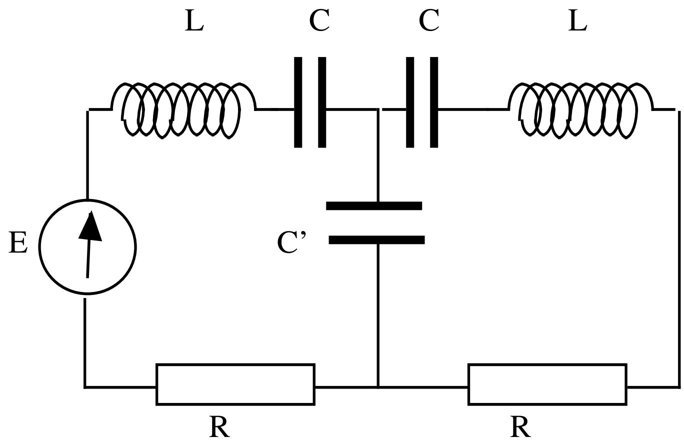
Un cerceau rigide de rayon R tourne autour d'un diamètre vertical à la vitesse angulaire ω_0.

Un petit anneau de masse m peut coulisser sans frottement sur le cerceau.

Déterminer les positions d'équilibre relatif de l'anneau et discuter leur stabilité.

M3 Oscillations forcées de systèmes couplés en électricité

On considère le circuit électrique :

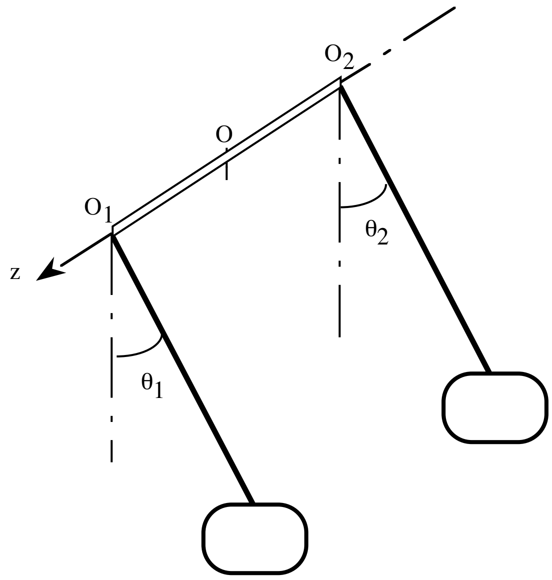


Où $E = E_0\cos\omega t$. Etablir les équations linéaires auxquelles obéissent les courants i_1 et i_2 dans les eux résistances en régime harmonique forcé.

Dans les cas où les résistances sont négligeables devant les autres impédances, étudier les variations des fonctions $i_1(\omega)$ et $i_2(\omega)$, en faisant apparaître deux pulsations propres du système.

Commenter.

M4 Oscillations libres de systèmes couplés en mécanique



La figure ci-dessus représente deux pendules simples rigides identiques (masse m, longueur l) pouvant osciller librement et sans frottements autour d'un même axe horizontal O_1O_2. Ils sont couplés par le fil de torsion O_1O_2 qui exerce sur chacun des pendules un moment de rappel colinéaire à l'axe de rotation et proportionnel à la torsion, c'est à dire à la différence des angles α_1 et α_2, avec une constante de proportionnalité C caractéristique du fil et appelée constante de torsion.

On s'intéresse à des oscillations libres des deux pendules à partir de conditions initiales quelconques. Etablir les équations différentielles auxquelles obéissent les angles α_1 et α_2 dans le cas de petits mouvements.

On cherche une solution oscillante commune aux deux pendules de sorte que :

$$\alpha_1 = \alpha_{10}\ e^{j\omega t} \quad \text{et } \alpha_2 = \alpha_{20}\ e^{j\omega t}$$

Montrer alors qu'il existe deux valeurs possibles ω_1 et ω_2 appelées pulsations propres. Quelle relation lie α_1 et α_2 dans chacun des types d'oscillations. Interpréter physiquement le résultat.

On se place à présent dans le cas où les deux pulsations propres sont très proches : à quelle situation physique cela correspond il ? . On part en outre des conditions initiales :

$$\alpha_1 = a \ \alpha_2 = 0, \quad \text{les vitesses initiales étant toutes deux nulles}$$

Etablir alors les lois $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$. Interpréter ce type d'oscillations appelé « pendules sympathiques ».

A la lumière de toutes ces questions, comment déterminer expérimentalement les différentes caractéristiques de ce système mécanique ?

M5 Une trajectoire originale

Un point matériel de masse m est soumis de la part d'un point fixe O à une force centrale de la forme

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^5}\,\vec{e}_r.$$

A l'instant t = 0, le point se trouve en M_0 à la distance r_0 de O, avec une vitesse V_0 orthogonale à OM_0.

Montrer qu'on peut choisir V_0 pour que la trajectoire soit un demi-cercle de diamètre r_0.

M6 Vitesse et trajectoires d'un satellite terrestre

Un satellite terrestre de masse m est lancé en M_0 à l'altitude h avec la vitesse initiale V_0 orthogonale à OM_0 (O centre de la Terre).

Discuter des trajectoires possibles suivant la valeur de V_0.

M7 Lancement manqué d'un satellite

Un satellite terrestre de masse m est supposé être lancé en M_0 à l'altitude h avec la vitesse initiale V_0 orthogonale à OM_0 (O centre de la Terre), de sorte que sa trajectoire soit circulaire.

En fait, par suite d'une erreur, cette vitesse présente un faible défaut d'orthogonalité repéré par l'angle α.

Quelles sont la nature et les caractéristiques de la trajectoire réelle ?

M8 Roulement sans glissement entre cylindres

Un cylindre d'axe horizontal, de rayon r, roule sans glisser à l'intérieur d'un cylindre creux d'axe fixe, également horizontal, de rayon R > r. La position du petit cylindre est repérée par l'angle α que fait la ligne des centres avec la verticale. Par rapport à un même référentiel, les vitesses angulaires des deux cylindres sont Ω pour le grand et ω pour le petit.

Etablir une relation entre α, Ω et ω.

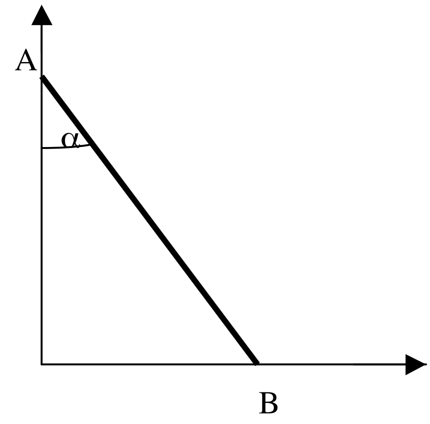
M9 Une échelle contre un mur

Une barre AB, de longueur l, est astreinte à se déplacer dans un plan vertical xOy, A restant sur Oy et B sur Ox.

Exprimer le vecteur $\vec{\Omega}(AB/R)$.

Déterminer $\vec{V}(A,AB/R)$, $\vec{V}(B,AB/R)$ et la vitesse d'un point quelconque Mde la barre .

En déduire que le mouvement de AB est une rotation pure autour d'un point I instantané que l'on déterminera .



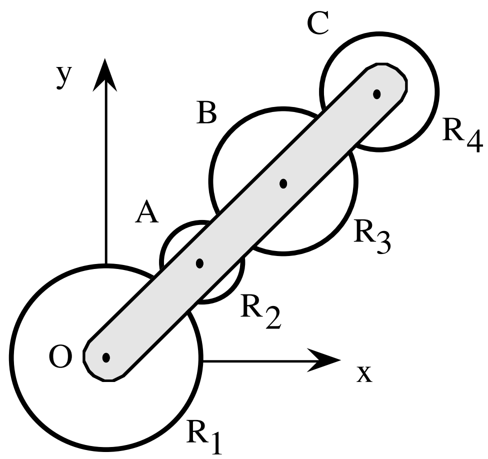
M10 Une bille dans une gouttière

Une sphère homogène, de masse m et de rayon R, roule sans glisser dans une gouttière dièdrique horizontale d'angle 2α. La vitesse du centre de la sphère est notée V.
Calculer l'énergie cinétique de la sphère en fonction de m, R, V et α.

M11 Train d'engrenages épicycloïdal

On considère le train d'engrenages suivant, où la roue de rayon R_1 est fixe et les quatre centres restent alignés sur le bras OC qui tourne à la vitesse angulaire ω autour de Oz.

Déterminer les vitesses angulaires de rotation des trois roues mobiles par rapport au référentiel lié à la roue 1.



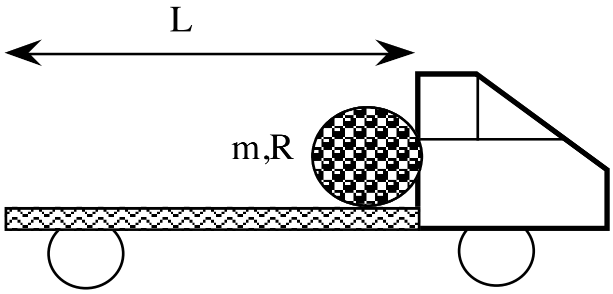
M12 Une échelle contre un mur (bis)

1°) Une échelle AB de longueur l et de masse m repose sans frottements sur un mur vertical en A et sur un plan horizontal en B. On abandonne l'échelle en position quasi-verticale, sans vitesse initiale. Pour quel angle quitte-t-elle le mur vertical ?

2°) On suppose maintenant que le contact en B est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement statique f_0. Un homme, assimilé à un point matériel de masse M ($M >> m$) grimpe à l'échelle, celle-ci faisant un angle α avec la verticale. Peut-il grimper jusqu'en haut de l'échelle sans que celle-ci commence à glisser? On discutera graphiquement et suivant les valeurs de f_0.

M13 Chute d'un cylindre de la plate-forme d'un camion

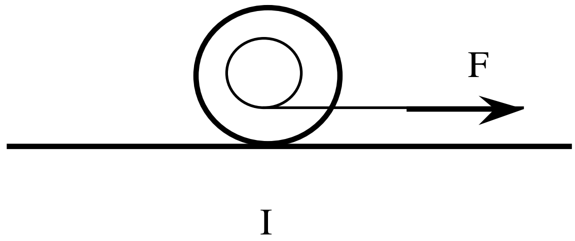
A t = 0, la camion démarre avec une accélération a constante. Le contact sur la plate-forme étant caractérisé par le coefficient de frottement f, au bout de combien de temps le cylindre tombera-t-il sur la route ?



M14 Yoyo sur un plan horizontal

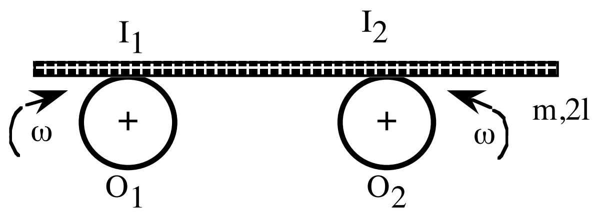
Sur la bobine, de rayons a et b, de moment d'inertie J par rapport à son axe, de masse m, est enroulé un fil inextensible et qui ne peut glisser sur la bobine. Le contact avec le plan horizontal est caractérisé par le coefficient de frottement de glissement f.

On tire sur le fil avec la force constante $\vec{F}$. Etudier le mouvement de la bobine suivant les valeurs de $\vec{F}$.



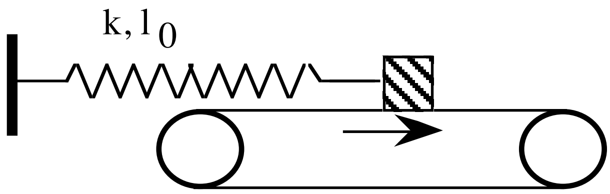
M15 Expérience de Timotchenko

Les cylindres, de rayon r, tournent autour de leur centre fixe. Les contacts en I_1 et I_2 sont caractérisés par le même coefficient f. A t = 0, on lâche la planchette sans vitesse initiale, son centre G étant décalé de a du milieu du segment O_1O_2.de longueur 2H. Quel est le mouvement de la planchette ?



M16 Oscillations non sinusoïdales

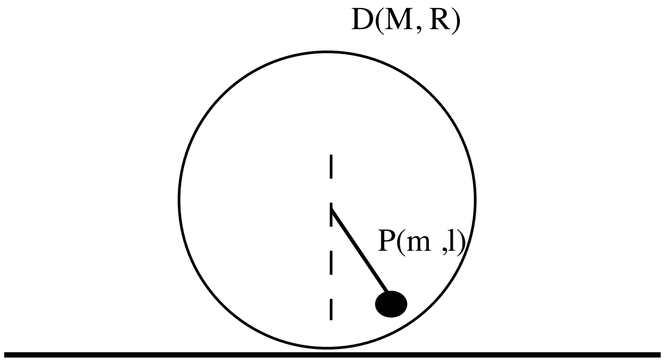
Le tapis roulant a une vitesse constante V. Quand il entraîne la masse m, le coefficient de frottement entre eux est f_0. Quand la masse m glisse sur le tapis, ce coefficient devient négligeable.



Etudier le mouvement de m en supposant, à t = 0, que le ressort a sa longueur naturelle et que la masse est entraînée par le tapis.

M17 Système mécanique à variables couplées

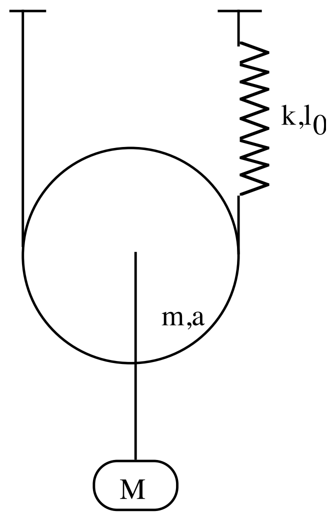
Déterminer les équations de mouvement du système ci-dessous. On se limitera à un mouvement de roulement sans glissement pour le disque D. Linéariser et résoudre les équations obtenues dans le cas de petits mouvements.



M18 Système mécanique à variables couplées (bis)

Déterminer la période des oscillations du système ci-dessous, le fil étant inextensible et ne glissant pas sur la poulie...

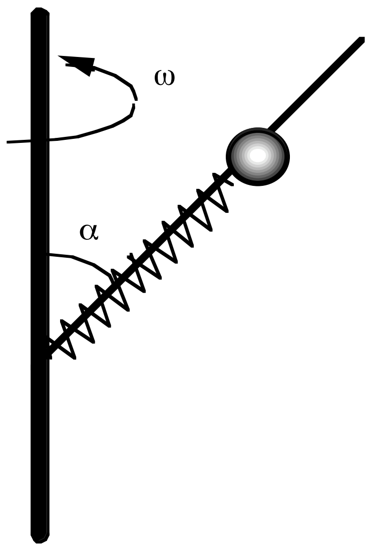
Reprendre le problème en supposant que M est accrochée à la poulie par l'intermédiaire d'un deuxième ressort identique au premier...



M19 Etude d'un équilibre relatif

On considère le système suivant où la tige T fait l'angle constant α avec la verticale et tourne à vitesse angulaire ω autour de celle-ci. Un anneau, point matériel de masse m, peut coulisser sans frottement sur la tige. Il est rappelé vers le point O par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0.

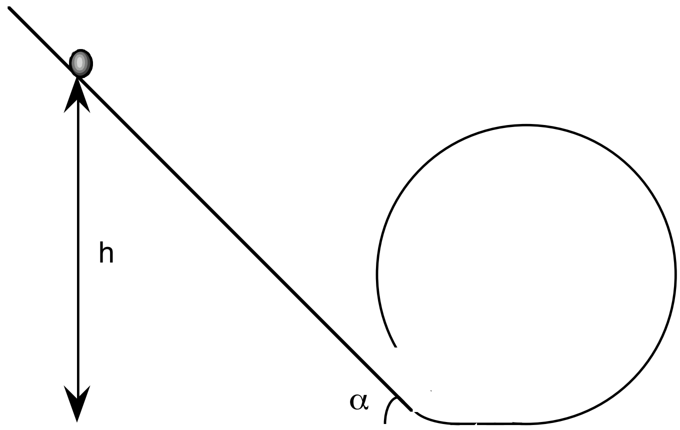
Déterminer la position d'équilibre relatif de l'anneau. Commenter. Démontrer que l'équilibre est stable et en déduire la pulsation des petits mouvements autour de cette position.



M20 Looping

On considère le système ci-contre où le profil de pente inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale se termine par un « looping » de rayon R.

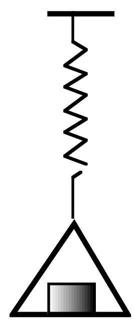
De quelle hauteur h doit on lâcher sans vitesse initiale un point matériel de masse m pour qu'il puisse faire le tour de looping ? On négligera tout frottement .



M21 Maintien d'un appui

Un point matériel de masse m repose sans frottement sur un plateau de masse M lui-même suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 suivant le dispositif ci–contre :

De quelle longueur h peut-on écarter le plateau de sa position d'équilibre et le lâcher sans vitesse initiale sans que la masse ne décolle jamais du plateau dans la suite du mouvement ?



M22 Modification de trajectoire satellitaire par perte de masse

Un satellite de masse m est en orbite circulaire autour d'un astre de masse M. On suppose que, brusquement, sans variation de la position ni de la vitesse du satellite :

- le satellite voit passer sa masse de m à αm ($0 < \alpha < 1$)
- L'astre voit passer sa masse de M à αM.

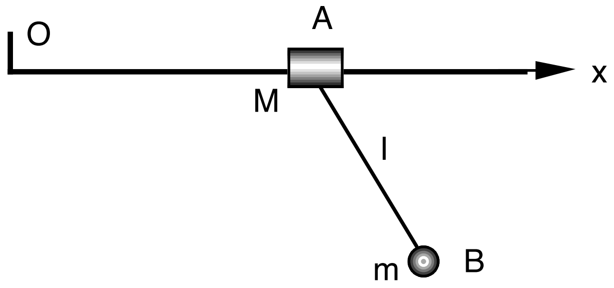
Discuter dans chaque cas la nouvelle trajectoire du satellite.

M23 La fin du monde…

On suppose que la terre perd brusquement sa vitesse orbitale autour du soleil. Déterminer la durée de la chute de la terre sur le soleil.

M24 Un oscillateur complexe

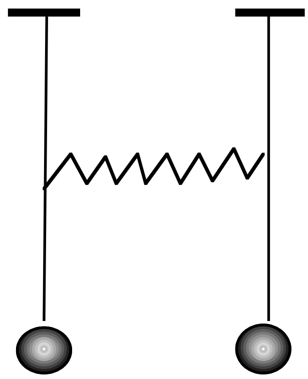
M coulisse sans frottements sur l'axe x. Déterminer la pulsation des petites oscillations du système.



M25 Oscillateurs couplés

Les deux pendules simples identiques (m, l), repérés par les angles θ_1 et θ_2 qu'ils font avec la verticale, sont reliés à mi hauteur par un ressort de raideur k.

Celui-ci possède sa longueur naturelle l_0 quand les deux pendules sont verticaux .



On étudie les oscillations libres du système, provoquées par des conditions initiales données.

Montrer que, dans le cadre de petits mouvements, les variables θ_1 et θ_2 obéissent à deux équations différentielles du second ordre dites couplées.

On cherche a priori une solution de ces équations sous la forme :

$$\theta_1(t) = \theta_{10} \cos \omega t \text{ et } \theta_2(t) = \theta_{20} \cos \omega t$$

Montrer alors qu'il existe deux valeurs possibles de ω, appelées pulsations propres du système d'oscillateurs. Quelle relation particulière lie θ_1 et θ_2 lorsque $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$? Interpréter physiquement ces relations, appelées modes propres associée aux pulsations propres.

Montrer qu'on peut sélectionner l'un ou l'autre des modes propres avec des conditions initiales appropriées.

Déterminer $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ et quand on impose $\theta_1(0) = \alpha$, $\theta_2(0)= 0$, et des vitesses initiales nulles.

M26 Un cycliste

On schématise une bicyclette se déplaçant à la vitesse V par un système de 3 solides :

- le cadre et le cycliste forment un premier solide de masse M
- les deux roues, cerceaux de masse m et de moment d'inertie mR^2 par rapport à leur axe, roulent sans glisser sur le sol.

Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble cycliste – bicyclette .

M27 Chenille de bulldozer

Un bulldozer se déplace à la vitesse V_0. Déterminer l'énergie cinétique de la chenille de masse m (on pourra noter R le rayon des roues de l'engin).

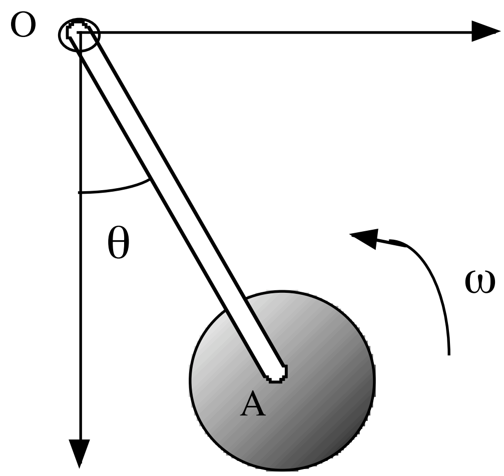
M28 Pendule composé

On considère le pendule composé :

- d'une tige rigide de masse m, de longueur l et de moment d'inertie J par rapport à un axe orthogonal passant par son extrémité
- d'un disque de masse M, de rayon R et de moment d'inertie I par rapport à son axe.

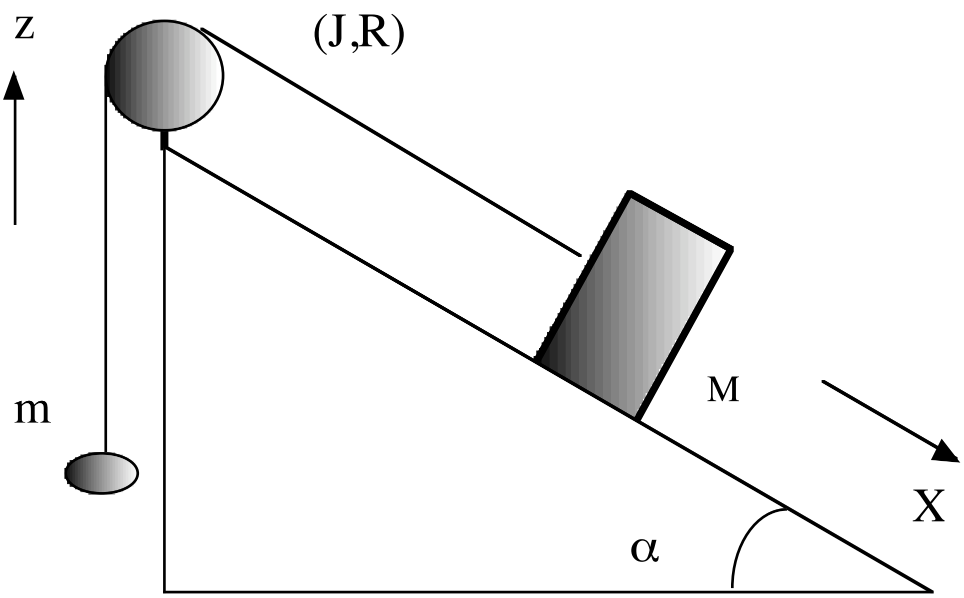
Le disque , fixé à l'extrémité A de la tige, peut tourner autour de l'axe Az.

Déterminer la composante suivant l'axe de rotation du moment cinétique en O et l'énergie cinétique du pendule



M29 Machine d'Atwood

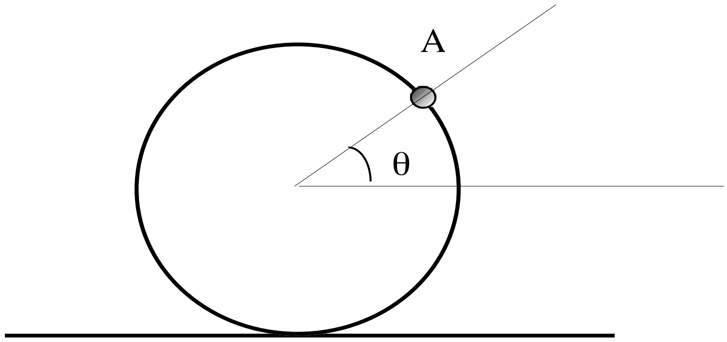
Déterminer la composante suivant l'axe de rotation du moment cinétique en O et l'énergie cinétique du système ci-dessous :



M30 Une roue lestée

Une roue lestée S est modélisée par un cerceau de masse m et de rayon R, à la périphérie duquel est fixée une masse identique m. Déterminer :

- $\vec{V}(A,S/R)$
- La position du centre de masse G du système et $\vec{V}(G, S/R)$
- L'énergie cinétique de la roue lestée, roulant sans glisser sur le sol



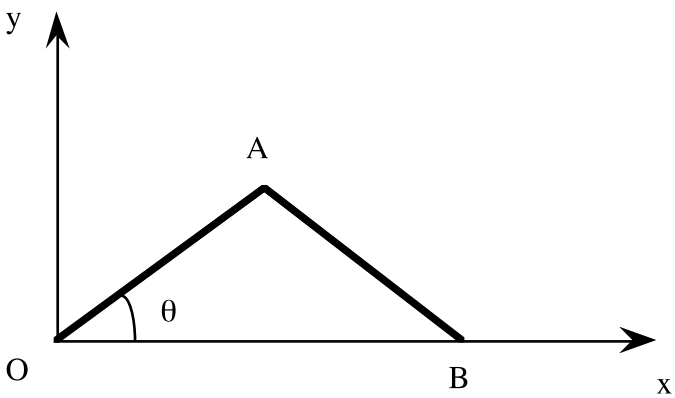
M31 Un singe sur une perche

Une perche P (m, l, J par rapport à son extrémité), s'abat sur le sol en gardant son extrémité O fixe. Un singe S de masse M, se déplace sur la perche pour garder son altitude h constante.

Déterminer la composante suivant l'axe de rotation du moment cinétique en O du système perche singe et l'énergie cinétique de l'ensemble.

M32 Echelle double

On considère le système formé par deux tiges identiques (masse m, longueur l) OA et AB articulées en A. Le point O est fixe alors que B est astreint à se déplacer sur l'axe Ox :



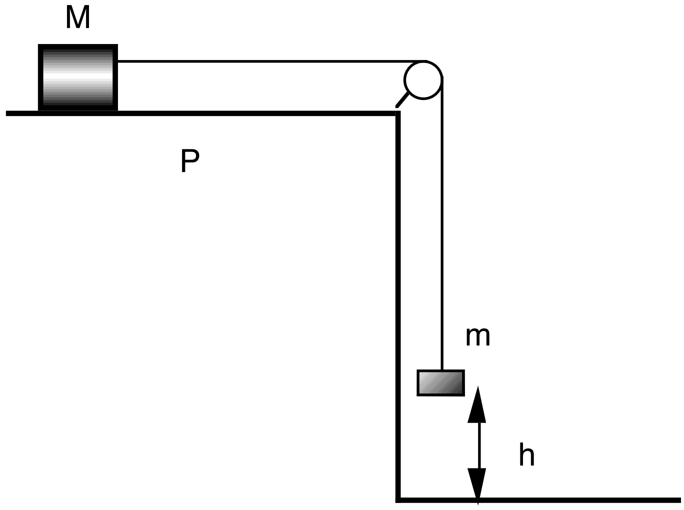
Déterminer l'énergie cinétique et le moment cinétique en O du système des deux tiges.

En l'absence de tout frottement, on abandonne le système sans vitesse initiale ans la position $\theta = \pi/2$.

Déterminer sa vitesse angulaire quand il s'abat sur le sol ($\theta = 0$).

On suppose à présent que l'appui en B s'effectue avec un frottement de glissement f. Déterminer la position limite d'équilibre du système.

M33 Détermination d'un coefficient de frottement



Déterminer le coefficient de frottement de glissement f entre la masse M et le plan P, sachant qu'abandonnée sans vitesse initiale, cette masse parcourt la distance D avant de s'arrêter.

(On négligera l'inertie de la poulie)

M34 Chute d'une tige sur le sol

Une tige de longueur l, de masse m, et de moment d'inertie J par rapport à un axe orthogonal à la tige et passant par son extrémité, est en équilibre vertical sur le sol horizontal. On provoque un léger déséquilibre. Déterminer le mouvement de la tige :

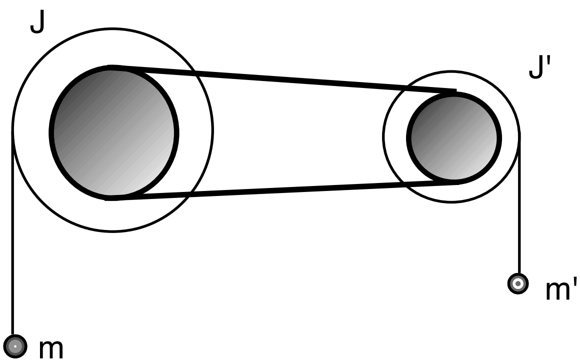
- lorsque le contact quasi -ponctuel entre la tige et le sol est sans frottement.
- Lorsqu'il existe un frottement de glissement de valeur f au niveau du contact.

M35 Courroie de transmission

Déterminer :

- l'accélération du système
- la différence des tensions de la courroie de transmission

On notera r, R, r' et R' les rayons inférieurs et supérieurs des 2 poulies. La courroie, inextensible, ne glisse pas sur les poulies.

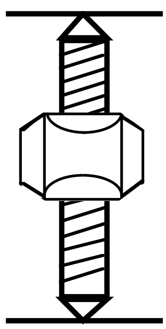


M36 Tige et boulon

La tige filetée, de longueur L et de moment d'inertie J par rapport à son axe, peut tourner sans frottement autour de cet axe. Le boulon de masse m et de moment d'inertie K par rapport à son axe, lâché sans vitesse initiale en haut de la tige, descend le long de la tige, sans aucun frottement.

Déterminer la vitesse du boulon quand il arrive en bas de la tige.

Déterminer les actions de contact entre la tige et le boulon. Quelle est leur puissance ?



M37 Oscillations de roulement sans glissement

Déterminer la pulsation des petites oscillations de roulement sans glissement de la roue sur le plan P.

Déterminer l'amplitude des oscillations forcées de roulement sans glissement de la roue quand le plan P est animé d'un mouvement d'équation $x = x_0 \sin \omega t$. A quelle condition n'y a-t-il pas glissement ?