

**PC 2009-2010**

**DEVOIR  
SURVEILLE N° 6**

**Samedi 20 mars**

- Etude d'un faisceau Laser (E3A PC 2005)
- Vibrations transversales d'une corde tendue (CCP PC 2009)

K18J



CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Physique PC

durée 4 heures

### L'usage de la calculatrice est autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le problème est centré sur le thème du **laser et de ses applications** ; il est structuré en deux parties indépendantes : étude des caractéristiques d'un faisceau laser, puis son absorption par un métal dans une première partie, traitement thermique d'un acier puis usinage d'un métal par vaporisation, en seconde partie.

*Remarques préliminaires importantes. Il est rappelé aux candidat(e)s que :*

- les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques,*
- tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème mais ne donnent pas lieu à des questions,*
- tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidat(e)s,*
- les données numériques générales ainsi qu'un formulaire sont fournies en fin d'énoncé.*

Les faisceaux laser de puissance sont actuellement très utilisés dans l'industrie tant dans les domaines du traitement thermique des aciers que du perçage, de la découpe ou de la soudure de matériaux divers. Pour ces applications, les lasers les plus souvent rencontrés sont le laser YAG-Nd<sup>3+</sup> (laser solide constitué d'un cristal de grenat d'yttrium et d'aluminium dopé par 1,5 % en poids d'oxyde de néodyme Nd<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) dont la transition la plus intense se situe à 1,06 μm et le laser à gaz (CO<sub>2</sub>) émettant dans le domaine infrarouge à 10,6 μm. Ces deux types de laser peuvent fonctionner aussi bien en mode continu qu'en mode impulsionnel.

Tournez la page S.V.P.

## PREMIÈRE PARTIE

### ETUDE D'UN FAISCEAU LASER

#### I.- Modèle à onde plane

- I.1** Ecrire les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants.
- I.2** En déduire les équations de propagation pour le champ électrique  $\vec{E}$  et pour le champ magnétique  $\vec{B}$ .

*Un faisceau laser peut être modélisé par une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation  $\omega$  se propageant dans le vide et dans le sens des  $z$  croissants. Le champ électrique de l'onde en un point  $M$  de cote  $z$  est donné par :*

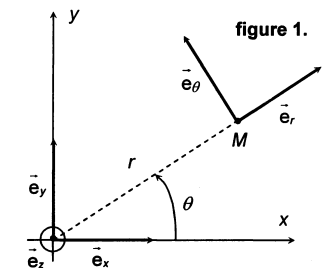
$$\vec{E}(M,t) = E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_x$$
, où  $E_0$  est un réel positif et  $i$  le nombre complexe de module unité et d'argument  $+\pi/2$ .

- I.3.a** Donner la relation entre  $k$  et  $\omega$  (relation de dispersion) et déterminer le champ magnétique de l'onde.
- I.3.b** Rappeler la définition du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}(t)$ . Déterminer sa moyenne temporelle  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  pour l'onde étudiée.
- I.3.c** Quelle est l'expression de la puissance moyenne qui traverse une surface  $S$  perpendiculaire à l'axe  $Oz$ ? En déduire la densité de puissance  $J_L$  (puissance moyenne par unité de surface).
- I.3.d** Un laser YAG-Nd<sup>3+</sup> possède une densité de puissance  $J_L = 4,0 \cdot 10^4 \text{ W.cm}^{-2}$ . Calculer l'amplitude  $E_0$  du champ électrique correspondant.

#### II.- Modèle du faisceau gaussien

*Une onde plane étant d'extension infinie, elle ne peut représenter de manière réaliste le faisceau du laser dont la section  $S$  est en pratique inférieure à  $1 \text{ mm}^2$ . Dans un modèle plus réaliste, l'onde électromagnétique du laser (se propageant toujours dans le vide et dans le sens des  $z$  croissants) peut être représentée comme une onde de profil gaussien, dont le champ électrique en un point  $M$  de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  peut être mis sous la forme :*

$$\vec{E}(M,t) = E(r,z) \exp[i(kz - \omega t)] \vec{e}_x$$



*avec  $k = 2\pi/\lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde. Dans cette expression, l'amplitude complexe  $E(r, z)$  du champ électrique dépend de  $r$  et de  $z$  et s'écrit :*

$$E(r,z) = E_0 \frac{iz_0}{z + iz_0} \exp\left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)}\right),$$

*où  $z_0$  est une constante positive appelée distance de Rayleigh et  $E_0$  un réel positif.*

**II.1.a** Montrer que le carré du module de  $\underline{E}(r, z)$  peut s'exprimer sous la forme :

$$|\underline{E}(r, z)|^2 = A^2(z) \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \quad (E1)$$

avec  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}$ . Déterminer la constante  $w_0$  ( $w_0 > 0$ ) en fonction de  $z_0$  et  $\lambda$ , puis montrer que :  $A(z) w(z) = E_0 w_0$ .

**II.1.b** Représenter les graphes des fonctions  $A(z)$  et  $w(z)$  pour  $z \in \mathbb{R}$ .

**II.1.c** Représenter les graphes du module  $|\underline{E}(r, z)|$  du champ électrique en fonction de  $r$  lorsque  $z = 0$ , puis pour une valeur fixée  $z > 0$ . Quelle signification physique peut-on donner à  $w(z)$  ?

*En pratique, l'amplitude complexe du champ électrique est une fonction lentement variable de  $r$  et  $z$ , ce qui signifie qu'à l'échelle de la longueur d'onde  $\lambda$ , les variations de  $\underline{E}(r, z)$  sont négligeables.*

**II.2.a** Justifier que cela revient à écrire :  $|\partial \underline{E} / \partial r| \ll k |\underline{E}|$  et  $|\partial \underline{E} / \partial z| \ll k |\underline{E}|$ .

**II.2.b** Compte tenu de l'approximation précédente, montrer à l'aide des équations de Maxwell que le champ magnétique de l'onde peut se mettre sous la forme approchée :

$$\underline{B}(M, t) \approx \frac{\underline{E}(r, z)}{c} \exp[i(kz - \omega t)] \bar{e}_y \quad (E2)$$

*On pourra utiliser les formules d'analyse vectorielle rassemblées en fin d'énoncé.*

**II.3.a** Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting  $\langle \bar{\Pi} \rangle$  et déterminer la densité de puissance de cette onde  $J(r, z) = \|\langle \bar{\Pi} \rangle\|$ .

*Etudions la répartition de  $J(r, z)$  dans un plan perpendiculaire à  $Oz$  et situé à la cote  $z$  et notons  $J_{\max}(z)$  la valeur maximale de  $J$  dans ce plan. Le rayon  $R(z)$  du faisceau laser à la cote  $z$  est défini comme la valeur de  $r$  pour laquelle  $J = J_{\max}(z) / e^2$ , où  $e$  est la base du logarithme népérien.*

**II.3.b** Déterminer l'expression de ce rayon en fonction de  $w(z)$ .

**II.3.c** Montrer que lorsque  $z \gg z_0$  le faisceau a la forme d'un cône de sommet  $O$  et de demi-angle au sommet  $\beta$ , qui sera exprimé en fonction de  $w_0$  et  $z_0$ , puis en fonction de  $w_0$  et  $\lambda$ .

*L'angle  $\beta$  est appelé divergence du faisceau laser.*

**II.3.d** Application numérique : dans le cas d'un laser YAG-Nd<sup>3+</sup>, possédant pour caractéristiques :  $w_0 = 0,50$  mm et  $\lambda = 1,06$   $\mu$ m, déterminer  $z_0$  et  $\beta$  en degrés. Reproduire le même calcul pour un laser CO<sub>2</sub> possédant le même  $w_0$  mais de longueur d'onde  $\lambda = 10,6$   $\mu$ m. Conclusion.

### III.- Absorption de l'énergie du laser dans un milieu métallique

*L'interaction d'une onde électromagnétique avec un métal se fait essentiellement par l'intermédiaire des électrons de conduction. Dans cette partie, nous modéliserons un métal homogène et électriquement neutre ( $\rho_{el} = 0$ ) comme un milieu ayant les mêmes propriétés que le vide (permittivité  $\epsilon_0$  et perméabilité  $\mu_0$ ) et constitué d'un ensemble d'électrons de conduction, de charge  $-e$ , de masse  $m$  et de densité uniforme  $N$  (nombre d'électrons par unité de volume). Ce métal est fixe par rapport au référentiel du laboratoire, supposé galiléen.*

*Etant donné un électron de vitesse  $\vec{v}$ , son interaction avec le milieu métallique est modélisée par une force de frottement fluide de la forme :*

$$\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}, \text{ où } \tau \text{ est un coefficient positif.}$$

*Supposons que le métal soit soumis à un champ électrique sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , de la forme :*

$$\underline{E}(t) = \underline{E}_0 \exp(-i\omega t), \text{ où } \underline{E}_0 \text{ est un vecteur complexe constant.}$$

**III.1** Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron de conduction. Quelle est la dimension de  $\tau$  ?

*En régime sinusoïdal permanent, la vitesse d'un électron s'écrit, en notation complexe :*

$$\vec{v} = \underline{V}(i\omega) \exp(-i\omega t)$$

**III.2.a** Déterminer l'expression de  $\underline{V}(i\omega)$  en fonction de  $i\omega$ ,  $e$ ,  $\tau$ ,  $m$  et de  $\underline{E}_0$ .

**III.2.b** En déduire le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  (en notation complexe) sous la forme :

$$\vec{j} = \underline{\sigma}(i\omega) \underline{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad (E3)$$

et expliciter la grandeur complexe  $\underline{\sigma}(i\omega)$  en fonction des données du problème. Quelle est la nature de ce milieu (du point de vue des propriétés électromagnétiques) ? Que représente physiquement  $\underline{\sigma}(i\omega)$  ?

*Etudions maintenant la propagation d'une onde électromagnétique dans ce milieu. Supposons que ce métal remplit tout le demi-espace  $z > 0$  et que le champ électrique de l'onde peut s'écrire :*

$$\underline{E}(M, t) = f(z) \exp(-i\omega t) \bar{e}_x, \text{ où } f(z) \text{ est une fonction complexe à}$$

déterminer.

*En tout point du métal existe une densité de courant de conduction reliée au champ électrique par l'équation (E3).*

**III.3.a** Ecrire les équations de Maxwell dans ce milieu. En déduire l'équation aux dérivées partielles du second ordre vérifiée par le champ électrique.

**III.3.b** Montrer que la fonction  $f(z)$  est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \underline{n}^2 f = 0 \quad (E4)$$

où  $\underline{n}$  est une grandeur complexe telle que :

$$\underline{n}^2 = 1 + \frac{i(\tau\omega_p)^2}{\tau\omega(1-i\tau\omega)}, \quad (E5)$$

en introduisant la pulsation  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}$  (appelée pulsation plasma).

Quelle est la signification physique de  $\underline{n}$  ?

**III.3.c** Calculer la valeur numérique de  $\omega_p$ , en prenant l'exemple de l'aluminium pour lequel :  $N = 1,81 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$  et  $\tau = 8,0 \cdot 10^{-15} \text{ u.S.I.}$

Dans la suite du problème, nous poserons  $\underline{n} = n' + i n''$ , où  $n'$  et  $n''$  sont deux nombres réels ( $n' > 0$ ) et  $k = \omega / c$ .

**III.3.d** Déterminer la solution complète de l'équation (E4) sachant que l'onde se propage dans le sens des  $z$  croissants et en posant  $\underline{A}_0 = \underline{f}(z=0)$ .

Quel est le phénomène physique généré par l'existence de  $n''$  ?

Donner l'expression de la vitesse de phase  $v_\phi$  de cette onde.

**III.3.e** Déterminer numériquement  $\underline{n}^2$ , puis calculer la valeur numérique de  $n'$  sachant que  $n'' = 13,41$  dans le cas de l'aluminium et pour la longueur d'onde du laser YAG-Nd<sup>3+</sup> ( $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$ ). Commenter ce résultat.

**III.4** Déterminer l'expression du champ magnétique de l'onde.

**III.5.a** En déduire la valeur moyenne du vecteur de Poynting  $\langle \overline{\Pi} \rangle$ .

Quelle est la puissance moyenne qui traverse une surface  $S$  perpendiculaire à  $Oz$  et située à la cote  $z > 0$  ?

Ecrire cette puissance sous la forme :  $P(z) = P_0 \exp(-\alpha z)$ , en donnant l'expression de  $P_0$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $c$ ,  $|\underline{A}_0|^2$ ,  $n'$  et  $S$ , puis celle du paramètre réel  $\alpha$  (appelé coefficient d'absorption) en fonction de  $k$  et  $n''$ .

**III.5.b** Déterminer la valeur numérique de  $\alpha$  pour l'aluminium et une pulsation  $\omega$  correspondant au laser YAG-Nd<sup>3+</sup>. En déduire un ordre de grandeur de la profondeur de pénétration de l'énergie de ce laser dans un échantillon d'aluminium. Commenter ce résultat.

La puissance moyenne  $P_0$  transmise à travers la surface  $S$  située en  $z = 0$  est entièrement absorbée par le métal. Si  $P_L$  désigne la puissance moyenne du faisceau laser incident à travers la même surface  $S$  perpendiculaire à la direction de propagation et  $P_R$  la puissance moyenne réfléchie par la surface métallique, la réflectivité  $R$  et l'absorptivité  $A$  de la surface métallique sont définis par les relations :

$$R = \frac{P_R}{P_L} \quad \text{et} \quad A = \frac{P_0}{P_L}$$

Ces coefficients dépendent de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement utilisé.

**III.6** Quelle est la relation liant les deux coefficients  $R$  et  $A$  ?

### Données numériques générales

Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
Permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide :	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Masse de l'électron :	$m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Charge de l'électron :	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

### Formulaire

Gradient (en coordonnées cylindriques) pour un champ scalaire  $f$  :

$$\overline{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z$$

Relations entre opérateurs :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \underline{A}) = \overline{\text{grad}} \text{div} \underline{A} - \Delta \underline{A}$$

$$\overline{\text{rot}}(f \underline{A}) = f \overline{\text{rot}} \underline{A} + \overline{\text{grad}} f \wedge \underline{A}$$

Laplacien (en coordonnées cylindriques) pour un champ scalaire  $f$  :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplacien vectoriel (en coordonnées cartésiennes) :

$$\Delta \underline{A} = (\Delta A_x) \underline{e}_x + (\Delta A_y) \underline{e}_y + (\Delta A_z) \underline{e}_z$$

Valeur moyenne du produit vectoriel de deux fonctions vectorielles sinusoïdales de même pulsation (notation complexe) :

$$\langle \underline{a} \wedge \underline{b} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{a} \wedge \underline{b}^*), \quad \underline{b}^* \text{ représentant le complexe conjugué de } \underline{b}$$

**FIN DE L'EPREUVE**

## PROBLÈME II VIBRATIONS TRANSVERSES

Ce problème porte sur la variation de fréquence d'un dispositif vibrant lorsque l'on y dépose une masse perturbatrice. Il aborde également le principe de fonctionnement d'un instrument très précis : la microbalance à quartz (QCM : quartz crystal microbalance).

### II.1 Ondes stationnaires le long d'une corde tendue

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique  $\mu$ , est soumise à une tension d'équilibre  $T$ . Ses déformations dans le plan  $(x, y)$  sont décrites par une fonction de hauteur  $y = h(x, t)$ . Dans tout le problème, les déformations de la corde par rapport à l'axe horizontal sont supposées suffisamment faibles pour que :

- l'angle  $\alpha(x, t)$  que fait la courbe  $h$  avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1, tout comme la dérivée  $\partial h / \partial x$ .
- les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisse respective  $x_A$  et  $x_B$ . Le milieu de la corde est noté C, d'abscisse  $x_C$  (Figure II.1). Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

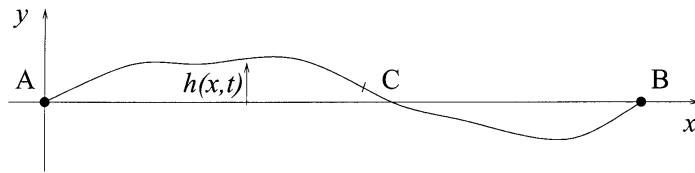


Figure II.1

#### - II.1.1

Soit un point O d'abscisse  $x_O$  situé dans l'intervalle  $[AB]$  ( $x_A < x_O < x_B$ ). La partie de la corde située à droite du point O ( $x > x_O$ ) exerce à chaque instant sur la partie de la corde située à sa gauche une certaine force  $\vec{F}(x_O, t)$ .

Comment s'exprime, en fonction de  $T$  et d'une dérivée de  $h(x, t)$ , la composante verticale (suivant  $y$ ) de cette force  $\vec{F}$  ?

#### - II.1.2

Etablir, dans le cadre des hypothèses énoncées ci-dessus, l'équation de d'Alembert vérifiée par  $h(x, t)$ . Exprimer la célérité  $c$  associée en fonction des paramètres  $\mu$  et  $T$ .

#### - II.1.3

Peut-on observer des discontinuités spatiales de la dérivée  $\partial h / \partial x$  en des points autres que A et B ? Justifier votre réponse.

#### - II.1.4

La corde est fixée en ses deux extrémités A et B à une hauteur nulle, soit  $h(x_A, t) = 0$  et  $h(x_B, t) = 0$ . La longueur de la corde entre ces deux points est  $2L$ , et l'on choisit l'origine du

repère de façon à avoir  $x_A = 0$  et  $x_B = 2L$ .

On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x, t) = Z \sin(kx + \phi) \cos(\omega t)$$

où  $Z$  est une amplitude arbitraire.

Donner, en la démontrant, la relation existant entre  $\omega$ ,  $k$  et  $c$ .

#### - II.1.5

Les valeurs admissibles de  $k$  (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes  $k_n$ , où  $n = 1, 2, 3, \dots$  est entier positif.

Donner l'expression des  $k_n$  admissibles, des pulsations propres  $\omega_n$  et des fréquences  $f_n$  associées.

Comment choisir la phase  $\phi$  ?

#### - II.1.6

Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental  $k_1$ , telle qu'on pourrait l'observer à l'aide, par exemple, d'une caméra rapide ou d'une lampe stroboscopique.

Tracer de la même façon l'allure des déformations associées à la première, deuxième et troisième harmonique (respectivement  $k_2, k_3, k_4$ ).

Compter et faire figurer sur votre schéma, à chaque fois, le nombre de "noeuds" et de "ventres" associés à ces modes de vibration.

#### - II.1.7

On peut montrer que l'énergie mécanique **par unité de longueur**  $e(x, t)$  associée à l'onde est égale à :

$$e(x, t) = \frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Calculer la valeur moyenne temporelle  $\langle e \rangle$  en un point quelconque  $x$  de la corde, pour le mode de vibration fondamental.

#### - II.1.8

En déduire l'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental. On exprimera le résultat en fonction de la tension  $T$  de la corde, de sa demi-longueur  $L$  et de l'amplitude  $Z$  des vibrations.

*Application numérique* : Que vaut l'amplitude  $Z$  des vibrations lorsque l'énergie totale du mode est égale à  $0,1 \text{ J}$ , avec  $L = 1 \text{ m}$ ,  $T = 100 \text{ N}$  ?

## II.2 Perturbation par une masse

On accroche à la corde une perle de masse  $m$ , située exactement au milieu de la corde, au point d'abscisse  $x_C = L$ . Cette masse est supposée ponctuelle (sans épaisseur).

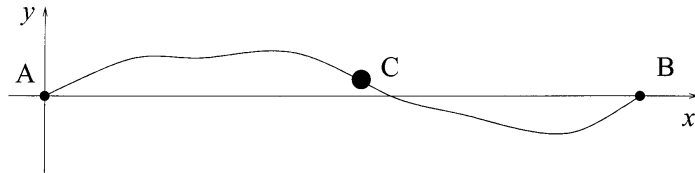


Figure II.2

### - II.2.1

En considérant les schémas tracés à la question II.1.6, déterminer les modes de vibration susceptibles d'être modifiés (changement de fréquence propre) par la présence de la masse  $m$ . Déterminer de la même façon les modes qui ne devraient pas être modifiés par la présence de la masse.

### - II.2.2

En présence de cette masse supposée ponctuelle, les dérivées à gauche et à droite de  $\partial h / \partial x$  ne sont pas nécessairement égales (la dérivée  $\partial h / \partial x$  est discontinue en  $L$ ).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD), trouver une relation entre  $T$ ,  $m$ ,  $\partial^2 h / \partial t^2(L, t)$  (accélération suivant  $y$  de la masse),  $\partial h / \partial x(L^-, t)$  et  $\partial h / \partial x(L^+, t)$ , où l'on a défini :

$$\partial h / \partial x(L^-, t) = \lim_{x \rightarrow L^-} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$$

lorsque  $x$  tend vers  $L$  par valeur inférieure, et :

$$\partial h / \partial x(L^+, t) = \lim_{x \rightarrow L^+} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$$

lorsque  $x$  tend vers  $L$  par valeur supérieure.  
Illustrer votre relation par un schéma.

### - II.2.3

On recherche le mode de vibration fondamental sous la forme d'une fonction symétrique par rapport à  $L$ , c'est-à-dire telle que  $h(x, t) = h(2L - x, t)$ , et donnée sur l'intervalle de gauche  $0 \leq x < L$  par :

$$h(x, t) = \sin(Kx) \cos(\omega t)$$

où  $K$  est un vecteur d'onde à déterminer, et  $\omega$  et  $K$  vérifient la relation de dispersion habituelle. Montrer que les conditions aux limites imposent désormais la condition de quantification suivante sur les valeurs possibles de  $\omega$  et  $K$  :

$$\cotan(KL) = \frac{\cos(KL)}{\sin(KL)} = \frac{m\omega^2}{2KT}$$

### - II.2.4

Tracer la courbe représentative de  $\cotan(x)$  sur l'intervalle  $]0, 3\pi[$ .

Montrer que si la masse  $m$  est nulle, on retrouve comme cas particulier de l'équation ci-dessus le vecteur d'onde  $k_1$  de la fréquence de vibration de la corde homogène.

### - II.2.5

Lorsque  $m$  est faible, on recherche un développement limité à l'ordre 1 en  $m$  du vecteur inconnu  $K$  :

$$K \simeq k_1 + \beta m$$

où  $\beta$  est une constante à déterminer en fonction de  $\omega$ ,  $c$ ,  $T$  et  $L$ . On utilisera en particulier le développement limité suivant de la fonction cotangente, valable pour de petites valeurs de  $\varepsilon$  :

$$\cotan\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \simeq -\varepsilon$$

$K$  est-il plus grand ou plus petit que  $k_1$  ?

### - II.2.6

Déduire de la question précédente le changement relatif de fréquence  $\Delta f_1 / f_1$  du mode de vibration fondamental de la corde lorsque l'on passe du vecteur  $k_1$  au vecteur  $K$ . Exprimer le résultat en fonction de  $m$ ,  $\mu$  et  $L$ .

La détermination expérimentale de la nouvelle fréquence de vibration permet donc de **déterminer la masse  $m$**  déposée sur la corde.

*Application numérique* : Calculer  $m$  lorsque  $L = 1$  m,  $T = 100$  N,  $\mu = 10^{-2}$  kg.m<sup>-1</sup>,  $\Delta f_1 = -1$  Hz.

## II.3 Une application : la microbalance à quartz

Les oscillations transversales d'un cristal de quartz taillé peuvent être mesurées et entretenues à l'aide de deux fines électrodes métalliques placées de part et d'autre de la lame (propriété piézoélectrique). La face supérieure du quartz est libre, et par un calcul généralisant celui de la question précédente, on montre que toute masse  $m$  déposée sur la face supérieure du quartz modifie sa fréquence de résonance  $f_1$  en raison de la loi :

$$\Delta f_1 = -\frac{2mf_1^2}{\rho_q c_q S}$$

connue sous le nom d'équation de Sauerbrey, dans laquelle  $\rho_q$  désigne la masse volumique du quartz,  $c_q$  la célérité des ondes ultrasonores associées à cette vibration, et  $S$  la surface du cristal vibrant.

Données :

- masse volumique du quartz :  $\rho_q = 2650$  kg.m<sup>-3</sup>

- célérité des ondes de vibration du quartz :  $c_q = 3340$  m.s<sup>-1</sup>

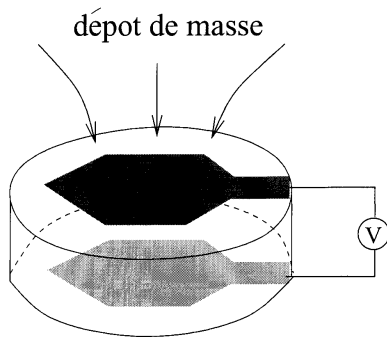


Figure II.3

Le phénomène ci-dessus est mis à profit pour mesurer de façon très sensible la variation de masse déposée sur la surface vibrante : c'est le principe de la **microbalance à quartz**, représentée sur la figure II.3. Toute masse  $m$  déposée sur la surface entraîne une diminution de la fréquence de résonance du quartz, qui peut être déterminée précisément à l'aide d'un circuit électronique approprié.

- **II.3.1**

Montrer que l'équation obtenue à la question II.2.6 est équivalente à l'équation de Sauerbrey, à condition de remplacer la masse linéique  $\mu$  de la corde par celle  $\rho_q S$  du cristal. En l'absence d'autre source d'amortissement, le cristal de quartz peut-être considéré comme un circuit résonant de fréquence  $f_1 = 5$  MHz, et de facteur de qualité élevé  $Q = 2 \times 10^6$ . Que vaut alors la largeur en fréquence de la bande de résonance du cristal ? Illustrer le résultat par un schéma.

- **II.3.2**

En se basant sur la largeur de la courbe de résonance, estimer la variation minimale de fréquence  $\Delta f_1$  qu'un tel dispositif est susceptible de détecter. En déduire la valeur minimale du rapport  $m/S$  (masse déposée par unité de surface) ainsi détectable.

*Application numérique* : donner la sensibilité, en nanogrammes, d'une microbalance à quartz dont la surface de vibration est  $S = 0,1 \text{ cm}^2$ .

*Remarque* : Dans la pratique, on utilise pour la mesure des fréquences de vibration harmoniques  $f_3, f_5, \dots$  plus élevées que  $f_1$ .

**Fin de l'énoncé**