Devoir Maison 6

Gémétrie du plan et nombres complexes

A rendre pour le vendredi 4 décembre.

Vous devez apporter le plus grand soin à la rédaction et à la pertinence des arguments avancés. Les résultats doivent être encadrés.

Problème 1. Un lieu de points

Le plan est rapporté à un repère orthornomé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $A(a, a)$ où a est strictement positif.

On se propose ici de déterminer l'équation cartésienne des cercles passant par O et A.

1. On construit une famille de cercles passant par A et O.
   (a) Former l'équation cartésienne de Δ, médiatrice de $[O, A]$.
   (b) Soit Ω_λ le point de Δ d'abscisse λ. Donner l'ordonnée de Ω_λ.
   (c) En déduire l'équation normale, puis l'équation cartésienne, du cercle $\mathcal{C}_\lambda$ de centre Ω_λ passant par O.
   (d) Montrer que A appartient à $\mathcal{C}_\lambda$.
2. Réciproque : on montre que la famille construite décrit tous les cercles passant par A et O.
   Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par O et A.
   (a) Soit Ω le centre de $\mathcal{C}$. Montrer que Ω appartient à Δ.
   (b) Soit λ l'abscisse de Ω. En déduire que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\lambda$.

On construit une famille de points H_λ où λ décrit $\mathbb{R}$.

3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_\lambda$ avec l'axe des abscisses. On note M_λ le point d'intersection d'abscisse strictement positive.
4. Former une équation cartésienne de la tangente T_λ à $\mathcal{C}_\lambda$ en M_λ.
5. On note H_λ le projeté orthogonal de A sur la droite T_λ. Déterminer les coordonnées de H_λ.
6. Quel est l'ensemble décrit par la famille de points H_λ ?

Problème 2. Orthocentre d'un triangle et droite d'Euler

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soient $A(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $B(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ et $C(0, -1)$ d'affixe respective a, b et c.

1. Déterminer l'équation cartésienne du cercle passant par les points A, B et C.
2. (a) Former une équation cartésienne de H_A la hauteur issue de A.
   (b) Former une équation cartésienne de H_B la hauteur issue de B.
   (c) Former une équation cartésienne de H_C la hauteur issue de C.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection Ω des droites H_A et H_B.
4. Vérifier que Ω appartient à H_C. En déduire que les hauteurs du triangle ABC se coupent en Ω et que l'affixe de l'orthocentre du triangle ABC est $a + b + c$.

On se propose démontrer le résultat suivant :

Soit ABC un triangle où A, B et C sont d'affixe respectif a, b et c. Si $|a| = |b| = |c| = 1$ alors l'affixe de l'orthocentre du triangle ABC est $a + b + c$.

6. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixe respectif u et v.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ à l'aide de $\bar{u}$ et v. (On pourra se rappeler comment exprimer $\|\overrightarrow{u}\|$ en complexe).
   (b) Exprimer $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ à l'aide de $\bar{u}$ et v.
7. Soient D une droite et M un point d'affixe z. Déduire de ce qui précède qu'il existe $p \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que
$$M \in D \Leftrightarrow \bar{p}\, z + p\bar{z} = \lambda.$$
   L'équation $\bar{p}\, z + p\bar{z} = \lambda$ est *l'équation complexe* de D.
8. Réciproquement, soient $p \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'ensemble
$$\widetilde{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \bar{p}\, z + p\bar{z} = \lambda\}$$
   a pour image une droite D. On exprimera l'affixe n d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à l'aide de p.
   (b) Exprimer l'affixe u d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ à l'aide de p.
9. Déterminer une équation complexe de la droite (AB) et déduire de ce qui précède l'équation complexe de la hauteur H_C issue de C.
10. Déterminer de la même façon l'équation complexe des hauteurs H_A et H_B issues de A et B respectivement.
11. Il s'agit ici de déterminer le point d'intersection de H_B et H_C.
   (a) Justifier que $(a - c)\,\overline{(a - b)} - (a - b)\,\overline{(a - c)} \neq 0$.
   (b) En déduire que les droites H_B et H_C se coupent en un point Ω d'affixe
$$\frac{(a^2 + bc)(\bar{c} - \bar{b}) + (b^2 + a\,c)\,(\bar{a} - \bar{c}) + (c^2 + a\,b)\,(\bar{b} - \bar{a})}{a\,(\bar{c} - \bar{b}) + b\,(\bar{a} - \bar{c}) + c\,(\bar{b} - \bar{a})}.$$
12. Montrer que si $|a| = |b| = |c| = 1$ alors
$$a\,b\,(\bar{a} - \bar{b}) + b\,c\,(\bar{b} - \bar{c}) + a\,c\,(\bar{c} - \bar{a}) = 0.$$
13. En déduire que l'affixe de Ω est $a + b + c$ lorsque $|a| = |b| = |c| = 1$.
14. En déduire la fameuse relation d'Euler.

Exercices de géométrie dans l'espace

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Soient $\overrightarrow{u}\,(\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5})$, $\overrightarrow{v}\,(-\frac{3\sqrt{2}}{10}, \frac{4}{5}, -\frac{3\sqrt{2}}{10})$ et $\overrightarrow{w}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
   (a) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée directe.
   (b) Soient $O'\,(0, 0, 1)$ et H le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 1 = 0$ dans le repère $\mathcal{R}$.
   Donner une équation cartésienne de H dans le repère $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
   (c) Calculer les coordonnées de O' dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
2. Soient $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ et $C(1, 1, 1)$. Calculer le volume du parallélipipède défini par les arêtes $[O, A]$, $[O, B]$, $[O, C]$. La famille $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ forme-elle une base ? Si oui, est-elle directe ? Justifier.
3. Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati (les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires) tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ soit une base directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Soit M un point intérieur à ce tétraèdre. On note $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les volumes respectifs des tétraèdres $MBCD$, $MCAD$, $MABD$ et $MABC$.
   (a) Expliciter α, β, γ et δ.
   (b) Montrer que M est le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ et (D, δ).