Géométrie analytique du plan

La géométrie analytique a été introduite par René Descartes. Ceci a été une avancée majeure.

" *Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leur progrès ont été lents et leurs usages bornés ; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêté des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Descartes que l'on doit l'application de l'Algèbre à la Géométrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des mathématiques*" .

(Lagrange 1795, *Oeuvres*, volume 7,p.271)

Il s'agit ici de faire de la géométrie par le **calcul** en introduisant un **repère**.

On repère les objets :
points ;
droites ;
cercles ;
...

par un système de coordonnées.

I- Différentes représentations du plan

Trois points de vue pour décrire un plan :

1. plan affine $\mathcal{P}$; on met en avant les points ;
2. plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$; on met en avant les vecteurs ;
3. plan complexe ; on met en avant l'aspect algébrique (le calcul) ;

Dans chaque situation, les objets ou problèmes étudiés seront décrits selon le point de vue choisi.

On peut ainsi établir dans le plan complexe les propriétés suivantes :

Les hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.

Le centre de gravité G ; le centre du cercle circonscrit Ω et l'orthocentre H d'un triangle non aplati sont alignés. De plus, on a la relation d'Euler

$$\overrightarrow{\Omega H} = 3\,\overrightarrow{\Omega G}.$$

I-1. Dictionnaire des synonymes

Modèle	$\mathcal{P}$	$\overrightarrow{\mathcal{P}}$	plan complexe
	points. A, B, C	vecteurs. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$	nombres complexes. z_A, z_B, z_C
	distance AB	norme $\Vert\overrightarrow{AB}\Vert$	module $\vert z_B - z_A\vert$
	alignement de A, B et C	colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ si $z_B - z_A \neq 0.$
	une origine : 1 pt privilégié O	le vecteur nul $\overrightarrow{0}$	le nombre complexe nul 0
Repérage	Repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec O origine et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ base de $\overrightarrow{P}$ $\Updownarrow$ 3 points non alignés O, A et B où	base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ signifie que $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont non colinéaires.	u et v non nuls avec $\frac{v}{u} \notin \mathbb{R}$

Modèle	$\mathcal{P}$ O origine et $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{\mathcal{P}}$	plan complexe
	repère orthonormé (direct) $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\mathcal{R}$ est un repère avec $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) =$ base orthonormée (directe)	base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	u et v non nuls avec $\frac{v}{u} \in i\mathbb{R}^*$ (ou $\frac{v}{u} \in i\mathbb{R}_+^*$)
barycentre	G barycentre de $(M_1, \alpha_1), \cdots, (M_n, \alpha_n)$	$(\sum_{i=1}^n \alpha_i)\, \overrightarrow{OG}$ $\vert\vert$ $\sum_{i=1}^n \alpha_i\, \overrightarrow{OM_i}$	$(\sum_{i=1}^n \alpha_i)\, z_G$ $\vert\vert$ $\sum_{i=1}^n \alpha_i\, z_{M_i}$

Modèle	$\mathcal{P}$	$\overrightarrow{\mathcal{P}}$	plan complexe
angle	$\widehat{BAC}$	$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$	Arg $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$
$\perp$	$\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$	$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$	Arg $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$