Notes sur les ensembles et applications

6 septembre 2009

I Ensembles

1. *Qu'est-ce qu'un ensemble ? Exemples*

« Dieu créa les entiers naturels, le reste est l'oeuvre de l'Homme. »

Leopold Kronecker

Nous ne définirons pas ce qu'est un ensemble : c'est une brique de base. Il est plus important de connaître les « règles » à employer pour manipuler des ensembles. Malgré cette mise-en-garde de principe, une «définition intuitive » d'un ensemble est la suivante.

Définition 1 *Un ensemble E est une collection d'objets (de préférence) mathématiques.*

- Un objet x est un **élément** d'un ensemble E si x appartient à E. Autrement dit : x figure dans la collection E.
- Si x est un élément de E, on note
$$x \in E.$$
Ce qui se lit « x appartient à E ».
- Si x n'est pas un élément de E, on note
$$x \notin E.$$
Ce qui se lit « x n'appartient pas à E ».

Principe d'extension Ce principe est fondamental. Le principe d'extension est le suivant :

Un ensemble E est entièrement décrit par ses éléments.

De façon imagée, on pourrait paraphraser ce principe en disant :

Dites-moi ce qu'est le contenu, je vous dirai ce qu'est le contenant.

Remarque : *Lorsque l'on peut énumérer les éléments d'un ensemble E, on décrira l'ensemble en extension. Par exemple,*

1. $E = \{1, 2, 3\}$ *désigne l'ensemble dont les éléments sont les entiers* $1, 2$ *et* 3.
2. *L'ensemble A constitué des lettres de l'alphabet s'écrit :*

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}.$$

Remarque : *Il faut avoir en tête que l'ordre dans lequel les éléments de l'ensemble sont énumérés importe peu ; qu'un élément répété plusieurs fois ne compte qu'une fois ! Ainsi :*

1. $\{1, 2, 3\}$ *et* $\{2, 1, 3\}$ *décrivent le même ensemble ;*
2. $\{1, 1, 2\}$ *et* $\{1, 2\}$ *décrivent le même ensemble.*

Egalité d'ensembles Le principe d'extension a pour conséquence l'égalité d'ensembles.

Soient E et F des ensembles. On dit que les ensembles E et F sont **égaux** s'ils possèdent <u>les mêmes éléments</u>.

On note $E = F$ si les ensembles E et F sont égaux ; $E \neq F$ s'ils ne sont pas égaux.

Remarque : *L'égalité entre deux ensembles peut se formuler ainsi :*

$$E = F \textit{ si et seulement si } (x \in E \Leftrightarrow x \in F)\,.$$

Pour se familiariser avec la notion d'égalité d'ensembles, voici deux exemples.

EXEMPLE :

1. $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$ *;*
2. *Soient* $E = \{1, 2, 3\}$ *et* $F = \{0, 1, 3\}$. *Les ensembles* E *et* F *ne sont pas égaux. En effet* $2 \in E$, *mais* $2 \notin E$ *;*
3. *Soient* $E = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in \mathbb{N})\,(n = 15\,m)\}$ *et* $F = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 5\,k)$ *et* $(\exists \ell \in \mathbb{N},\ n = 3\,\ell)\}$. *Les ensembles considérés sont décrits en* ***compréhension*** *(voir plus loin). On a* $E = F$ *: ceci est admis pour le moment (il faut avoir des souvenirs d'arithmétique).*

Exemples d'ensemble d'usage fréquent

- $\emptyset$: désigne l'ensemble vide (l'ensemble qui n'a aucun élément) ;
- $\mathbb{N}$: désigne l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{Z}$: désigne l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbb{Q}$: désigne l'ensemble des nombres rationnels ;
- $\mathbb{R}$: désigne l'ensemble des nombres réels ;
- $\mathbb{C}$: désigne l'ensemble des nombres complexes.

Bien entendu, d'autres ensembles interviendront tout au long de l'année et les notations correspondantes pour les désigner apparaitront le cas échéant.

Description en compréhension On a vu deux exemples sans pour autant dire ce qu'est précisément cette description. Un ensemble F est décrit en compréhension s'il est décrit comme l'ensemble des éléments d'un ensemble E ayant une certaine propriété $P(x)$. On écrit alors :

$$F = \{x \in E \mid P(x)\}.$$

Par exemple, l'ensemble $2\mathbb{N}$ des entiers pairs peut être décrit en compréhension ainsi

$$2\,\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N}, n = 2\,k)\},$$

la propriété $P(n)$ étant ici $(\exists k \in \mathbb{N}, n = 2\,k)$.

Remarque :

1. *On n'oubliera pas d'écrire* $x \in E$ *(on précise dans quel ensemble choisir* x*). Mettre simplement* x *n'a pas de sens, et pire, peut conduire à de sérieux paradoxes.*
2. *On parle également de description en sélection : on sélectionne les éléments qui ont la « bonne » propriété.*

Inclusion Soient E et F des ensembles. On dit que E est **inclus** dans F si <u>tous les éléments de E</u> sont des éléments de F.

On note $E \subset F$ si E est inclus dans F ; $E \not\subset F$ si E n'est pas inclus dans F.

Remarque : *L'inclusion d'un ensemble* E *dans un ensemble* F *peut se formuler ainsi :*

$$E \subset F \textit{ si et seulement si } (x \in E \Rightarrow x \in F)\,.$$

ou ainsi :

$$E \subset F \textit{ si et seulement si } (\forall x \in E,\ x \in F)\,.$$

Remarque :

1. *Pour établir $E \subset F$, on se fixe $x \in E$ arbitraire et on établit que ce x arbitraire appartient à F ;*
2. *Pour établir au contraire que $E \not\subset F$, on exhibe un $x \in E$ tel que $x \notin F$.*

Les propriétés suivantes sont fréquemment utilisées :

Propriété 1 *Soient E, F et H des ensembles.*

1. $\emptyset \subset E$;
2. $E \subset E$;
3. *Si* $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$;
4. $E = F \Leftrightarrow (E \subset F$ et $F \subset E)$.

Remarque : *La propriété 1 ci-dessus est loin d'être évidente. Pour établir une propriété où intervient l'ensemble vide, il est fréquent de faire un **raisonnement par l'absurde.** Nous renvoyons aux notes sur les différents raisonnements et leur bon usage pour la démonstration de cette propriété 1.*

À retenir :

- $\emptyset$ est inclus dans n'importe quel ensemble ;
- Pour établir que deux ensembles E et F sont égaux, on procédera par **double-inclusion** :
  On établit que $E \subset F$;
  puis que $F \subset E$.

EXEMPLE :

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
2. *Soient* $F = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 5\,k)$ *et* $(\exists \ell \in \mathbb{N},\ n = 3\,\ell)\}$ *et* $E = \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in \mathbb{N})\,(n = 15\,m)\}$.
   On a $F \subset E$.
   En effet : soit $n \in F$. D'après la définition, n s'écrit de deux manières :
   – il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3\,k$;
   – il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $n = 5\,\ell$.
   Ces deux écritures de n permettent de dire que 3 et 5 figurent dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par conséquent n est un multiple de $15 = 3 \times 5$. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 15\,m$: n appartient donc à E. Ceci établit que $F \subset E$.

Exercices. *Établir que $E \subset F$. En déduire $E = F$.*

2. *Parties d'un ensemble. Opérations sur les parties*

Un ensemble F contenu dans E est appelé une **partie** de E (synonyme : sous-ensemble).

L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque : *On a $F \subset E \Leftrightarrow F \in \mathcal{P}(E)$.*

EXEMPLE :

1. *$\emptyset$ et E sont des parties de E. On peut donc écrire : $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$; $E \in \mathcal{P}(E)$.*
2. *$\{1, 2\}$ est une partie de $\{1, 2, 3\}$.*
3. *Soit $E = \{1, 2\}$. On a $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.*

Exercices.

1. *Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Décrire $\mathcal{P}(E)$.*
2. *À quoi est égal $\mathcal{P}(\emptyset)$?*

Réunion. Intersection Soient E un ensemble ; F et G des parties de E.

- On note $F \cup G$ (qui se lit « F union G ») l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à F ou à G, c'est-à-dire
  $$F \cup G = \{x \in E \mid (x \in F) \text{ ou } (x \in G)\}.$$
  L'ensemble $F \cup G$ est la **réunion** des ensembles F et G.

- On note $F \cap G$ (qui se lit « F inter G ») l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à F et à G, c'est-à-dire
  $$F \cap G = \{x \in E \mid (x \in F) \text{ et } (x \in G)\}.$$
  L'ensemble $F \cap G$ est l'**intersection** des ensembles F et G.

Exemple : *Soient* $F = \{0,1,3\}$ *et* $G = \{1,2\}$.

$$F \cup G = \{0,1,2,3\}\ ;\ F \cap G = \{1\}.$$

Voici quelques propriétés, il y en a bien d'autres encore. Il ne s'agit en aucun cas de les connaître toutes par coeur ; en revanche, il faut savoir les retrouver rapidement !

Propriété 2 *Soient* F, G *et* H *des parties d'un ensemble* E. *On a :*
1. $\emptyset \cup F = F$; $\emptyset \cap F = \emptyset$;
2. $F \cup G = G \cup F$; $F \cap G = G \cap F$;
3. $F \cap G \subset F \subset F \cup G$; ;
4. *Si* $F \subset H$ et $G \subset H$ alors $F \cup G \subset H$;
5. $F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$.

Remarque :
1. *On a bien entendu* $F \cap G \subset G \subset F \cup G$. *(cf. la propriété 3) ;*
2. *On a bien entendu* $(F \cup G) \cap H = (F \cap H) \cup (G \cap H)$. *(cf. la propriété 5)*
3. *La propriété 5 est une propriété de distributivité :* $\cap$ *est distributive par rapport à* $\cup$ *(par analogie avec la multiplication qui est distributive par rapport à l'addition).*

On a établi $(F \cap G) \cup (F \cap H) \subset F \cap (G \cup H)$ en cours.

Remarque : *Soient* $F_1, \cdots, F_n$ *des parties de* E, *on définit de manière analogue leur réunion et leur intersection. On les note respectivement :*
- $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ *ou encore* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$;
- $F_1 \cap \cdots \cap F_n$ *ou encore* $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} F_i$.

Complémentaire Soient E un ensemble et F une partie de E. On note $C_E\, F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F, c'est-à-dire

$$C_E\, F = \{x \in E; \mid x \notin F\}.$$

L'ensemble $C_E\, F$ est le **complémentaire de** F **dans** E.

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, on écrira F^c en lieu et place de $C_E\, F$.

Remarque : *Les notations* $\bar{F}^E$ *et* $\bar{F}$ *sont parfois employées pour désigner le complémentaire.*

Exemple :
1. *Soient* $E = \mathbb{R}$ *et* $F = \mathbb{Q}$; F^c *est l'ensemble des nombres irrationnels.* $\sqrt{2}, e, \pi$ *sont des éléments de* F^c *(des nombres irrationnels donc).*
2. *Soient* $E = \mathbb{N}$ *et* $F = 2\,\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers pairs ;* F^c *est l'ensemble des entiers impairs :*

$$F^c = \{2\,k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Propriété 3 *Soient* E *un ensemble ;* F *et* G *des parties de* E. *On a :*
1. $\emptyset^c = E$; $E^c = \emptyset$;
2. $(F^c)^c = F$;
3. $F \subset G \Leftrightarrow F^c \supset G^c$;
4. (a) $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c$;
   (b) $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$;

Les propriétés 4.(a) et 4.(b) sont les *lois de Morgan.*

Exercices.
1. *Que dire de* $F \cap F^c$ *et* $F \cup F^c$ *?*
2. *Établir la propriété 3.*
3. *Démontrer les lois de Morgan. On ne procédera non pas par double-inclusion, mais par équivalence, pour établir les égalités d'ensembles.*

Différence. Différence symétrique Plus généralement, soient F et G des parties de E.

On note $F \setminus G$ (se lit « F privé de G ») l'ensemble des éléments de F qui n'appartiennent pas à G, c'est-à-dire

$$F \setminus G = \{x \in F \mid x \notin G\}.$$

On note $F\Delta G$ l'ensemble $(F \setminus G) \cup (G \setminus F)$. L'ensemble $F\Delta G$ est la *différence symétrique* de F et G. Le terme « symétrique » se comprend dans le sens où $F\Delta G = G\Delta F$.

Propriété 4 *Soient E un ensemble; F et G des parties de E. On a $F \setminus G = F \cap G^c$.*

Exercices.

1. *À quelle condition nécessaire et suffisante $F \setminus G = \emptyset$? Même question pour $F \setminus G = F$.*
2. *Comparer $(F \cup G) \setminus (F \cap G)$ et $F\Delta G$. On utilisera si possible les différentes propriétés énoncées jusqu'à présent.*

3. Produit cartésien

Soient E et F des ensembles non vides.

Le produit cartésien $E \times F$ des ensembles E et F est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$, c'est-à-dire :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Deux couples (x, y) et (x', y') de $E \times F$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Plus généralement, si $E_1, \cdots, E_n$ sont n ensembles non vides (avec $n \geq 2$), le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ (noté parfois $\prod_{i=1}^{n} E_i$) est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \cdots, x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid \forall i \in \{1, \cdots, n\}, x_{\in} E_i\}.$$

Deux n-uplets $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ de $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont égaux si et seulement si $x_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Cas particulier Lorsque $E_i = E$ pour $1 \leq i \leq n$, $E_1 \times \cdots \times E_n$ se note E^n. Autrement dit :

$$E^n = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{\text{n fois}}.$$

Nous verrons un peu plus loin une autre manière de décrire E^n.

EXEMPLE :

1. *$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ représente le plan usuel muni d'un repère $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé direct.*
2. *$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ représente l'espace usuel muni d'un repère $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormé direct.*