

Feuille de TD 4

Sur les nombres complexes

I RÉVISIONS

1. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

(a) $(1 + i\sqrt{3})^3$ (b) $\frac{2i-2\sqrt{3}}{4i+4}$ (c) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^3}$
 (d) $\cos(\frac{\pi}{12}) - i \sin(\frac{\pi}{12})$ (e) $\sin(\frac{\pi}{15}) + i \cos(\frac{\pi}{15})$ (f) $1 - i \tan(\frac{\pi}{13})$

2. Calculer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

(a) $(1 - i)^6$ (b) $(2\sqrt{3} - 2i)^8$ (c) $\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i\sqrt{3})^{12}}$.

3. Pour quelles valeurs de n , le nombre complexe $(\sqrt{3} + 3i)^n$ est réel.

4. Soient z et z' deux nombres complexes.

À quelle condition $z z'$ est un nombre réel ? $z z'$ est un imaginaire pur ?

5. Soient $z_1 = \frac{\sqrt{6-i\sqrt{2}}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

- (a) Déterminer la forme trigonométrique de z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.
 (b) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

6. Soit $j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (a) Montrer que $j^3 = 1$. En déduire que $1 + j + j^2 = 0$.
 (b) calculer $(1 - j)^6$ de deux façons différentes.

7. Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. En indiquer le module et un argument.

8. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $e^{\frac{2i\pi}{3}} z$.

- (a) Caractériser la transformation ponctuelle T .
 Soit M_1 le point d'affixe $z_1 = -\sqrt{3} + i$
 (b) Déterminer l'affixe z_2 du point $M_2 = T(M_1)$; l'affixe z_3 du point $M_3 = T(M_2)$.
 (c) Placer les points M_1 , M_2 et M_3 dans le plan complexe rapporté au repère \mathcal{R} .
 (d) Calculer la forme algébrique de $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$. En déduire la nature du triangle $M_1 M_2 M_3$.

II TRIGONOMÉTRIE

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes d'inconnue x :

(a) $\tan(3x - \frac{\pi}{5}) = \tan(x + \frac{4\pi}{5})$ (b) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$
 (c) $a \cos(2x) = 4 \sin(x)$ où $a \in \mathbb{R}$ (d) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = -\sqrt{3}$
 (e) $\sin x + (1 + \sqrt{2}) \cos x - 1 = 0$ (f) $(\sqrt{3} + 1) \cos x + (\sqrt{3} - 1) \sin x + \sqrt{3} - 1 = 0$.

2. Linéariser $\cos^5(\theta)$ et $\sin^5(\theta)$.

3. Développer :

- (a) $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$. Établir que $\cos(3\theta)$ s'exprime comme un polynôme de degré 3 en $\cos(\theta)$.
 (b) Linéariser $\sin(6\theta)$. En déduire que $\frac{\sin(6\theta)}{\sin(\theta)}$ peut s'exprimer comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

4. Donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'}, e^{i\theta} - e^{i\theta'}, 1 + e^{i\theta}, 1 - e^{i\theta}.$$

Retrouver les formules de trigonométrie bien connues portant sur :

$$\cos(p) + \cos(q), \sin(p) + \sin(q), \cos(p) - \cos(q), \sin(p) - \sin(q).$$

5. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On pose $t = \tan \theta$.

(a) Déterminer les formes trigonométrique et algébrique de $z = \frac{1+i t}{1-i t}$.

(b) En déduire les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(2\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(2\theta) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Retrouvez alors $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan \theta$. Sous quelle condition est-ce valable ?

6. Étant donné $a \in \mathbb{R}$, résoudre dans \mathbb{R} le système d'inconnues x, y :

$$\begin{cases} \cos x + \cos y &= 1 + \cos a \\ \sin x + \sin y &= \sin a \end{cases}$$

III RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

1. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

(a) $z^2 = -7 + 24i$

(b) $z^2 = -3 - 4i$

(c) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

(d) $z^2 - z + 1 = 0$

(e) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0$

(g) $iz^2 + (4i-3)z - 5 + i = 0$

(h) $16(z-1)^4 + (z+1)^4 = 0$

(j) $z^2 + 8i = |z|^2 - 2$

(k) $iz^2 - 2\bar{z} + z - i = 0$

(j) $z^n + 2z^{n-1} + \dots + 2z + 1 = 0$ où $n \geq 2$ est un entier

2. Donner une forme trigonométrique des solutions complexes de $z^2 - z + 1 = 0$.

3. Déterminer le module et un argument des racines du trinôme

$$z^2 - 2(1 + \cos(\phi))z + 2(1 + \cos(\phi)) = 0.$$

4. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^5 = z - \bar{z}$.

5. *Résolution d'une équation polynomiale de degré 4*

Le but est de résoudre dans \mathbb{C} l'équation polynomiale

$$z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0.$$

(a) Montrer que cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} u^2 - 5u + 4 &= 0 \\ u &= z + \frac{1}{z} \end{cases} \quad (1)$$

(b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$.

(c) En déduire alors les solutions du système (1).

(d) *Question subsidiaire.* Déduire de ce qui précède une méthode générale pour déterminer l'ensemble des solutions complexes d'une équation polynomiale de la forme $z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0$ avec a, b des nombres complexes.

6. Résoudre dans \mathbb{C} le système d'inconnues z et z' :

$$\begin{cases} 2z + (1-i)z' &= 2+i \\ iz + (2+i)z' &= 3-2i. \end{cases}$$

IV SOMMES ET RACINES n -IÈMES

1. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, établir l'inégalité $\sum_{k=1}^n |\sin(k)| \geq \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2 \sin(1)}$. Obtenir une inégalité du même genre pour $\sum_{k=1}^n |\cos(k)|$.
2. Déterminer
 - (a) les racines carrées, cubiques et quatrièmes de $2i$ et $1+i$ que l'on représentera graphiquement.
 - (b) les racines cinquièmes de $-i$.
 - (c) les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i} \sqrt{3}$.
3. Étant donnés $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier :
 - (a) $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.
 - (b) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(k\theta)}{(\cos\theta)^k}$ avec $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.
 - (c) $1 + \binom{n}{1} \cos(\theta) + \binom{n}{2} \cos(2\theta) + \dots + \binom{n}{n} \cos(n\theta)$.
4. Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Calculer $S = a + a^3 + a^5$ et $T = a^3 + a^5 + a^6$.
5. Soient $n \geq 2$ et $p \geq 1$ des entiers. Calculer $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta^p$, où \mathbb{U}_n désigne le groupe des racines n -ièmes de l'unité.
6. On pose $z_n = e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ fixé différent de $\pi \bmod 2\pi$. Montrer que l'ensemble des images appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

V NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE. DIVERS

1. Soient n nombres complexes z_1, \dots, z_n .
 - (a) Montrer que $|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$.
 - (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité se produise.
2. Soient z, z' deux nombres complexes. Établir l'inégalité suivante :

$$\operatorname{Re}(z \bar{z}') \leq \frac{1}{2} (|z|^2 + |z'|^2).$$

Est-elle optimale ?

3. Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer l'identité remarquable suivante :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Pourquoi cette identité porte le nom d'identité du parallélogramme ?

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer qu'alors $|1 + z| \geq 1$ ou $|1 + z^2| \geq 1$.
5. Résoudre dans \mathbb{C} les équations $|z + 5| = |z - i|$ et $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{\pi}{4}$.
6. Résoudre dans \mathbb{C} le système d'inéquations

$$\begin{cases} |z + 1| \leq 1 \\ |z - 1| \leq 1 \end{cases}$$

7. Soient a et b deux nombres complexes de module 1, avec $ab \neq 1$. Montrer que $\frac{a+b}{1-ab}$ est un nombre réel que l'on exprimera en fonction de a et b .
8. Soit $z \in \mathbb{C}$.
 - (a) Montrer que $|\frac{z-i}{z+i}| < 1$ si et seulement si $\operatorname{Im}(z) > 0$.
Soit f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ par $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
On pose $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
 - (b) En déduire que $f(E) \subset F$.
 - (c) Montrer que f réalise une bijection de E sur F puis déterminer sa réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$.