

Feuille de TD 5

Compléments sur les nombres complexes. Manipulation de sommes

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objet de cet exercice est de calculer $S_n = \sum_{k=0}^n k^2$.

(a) Calculer $\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - k^3$.

(b) En écrivant $(k+1)^3 - k^3$ différemment, en déduire S_n .

(c) Comment procéder pour calculer $\sum_{k=0}^n k^3$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que si k est un entier vérifiant $0 \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{k}$ représente le coefficient binomial C_n^k .

(a) Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

(b) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$.

(c) Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{C}$. Calculer $\sum_{k=0}^n k r^k$ et $\sum_{k=0}^n k^2 r^k$. Retrouver $\sum_{k=0}^n k^2$.

5. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite. Déterminer $\sum_{k=1}^n (2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1})$.

6. On veut calculer $\sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$.

On pose $u_n = 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2n^2} = \frac{u_n - u_{n-1}}{1 + u_n u_{n-1}}.$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\alpha_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $u_n = \tan \alpha_n$.

(c) Que peut-on dire de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie ?

(d) Déduire des questions précédentes que $\sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ est une somme télescopique. Conclure.

(e) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$?