Feuille de TD 6

Équations différentielles

I Calcul de primitives

On calculera une primitive des fonctions suivantes en indiquant un (ou des) intervalle(s) où cela a du sens.

1.	$\int \frac{2\,t+5}{(t^2+5\,t+8)^4}\,dt.$	2.	$\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$	3.	$\int (\ln y)^2\;dy.$
4.	$\int \sqrt{5\,x+4}\,dx.$	5.	$\int \tan(3\,t)\,dt.$	6.	$\int \frac{1}{1+e^{\omega}}\,d\omega.$
7.	$\int \frac{2}{\sqrt{6\,x^2-4}}\,dx.$	8.	$\int \frac{2}{\sqrt{6\,x^2+4}}\,dx.$	9.	$\int \sin^4(\theta)\,\cos^4(\theta)\,d\theta.$
10.	$\int \frac{dx}{x^2+2\,x+5}.$	11.	$\int \operatorname{argch} y\,dy.$	12.	$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx.$

II Equations différentielles du premier ordre

1. Soit $y'+a(t)\,y=0$ une équation différentielle linéaire définie sur un intervalle ouvert I. Si f est une solution non nulle de l'équation différentielle, f peut-elle s'annuler sur I ? On justifiera la réponse.
2. Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes.
   (a) $y'+2y=x^2-2\,x+3$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) $(1+t^2)z'-2\,tz=0$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) $(1-x)^2y'=(2-x)\,y$ sur $]-\infty,-1[$.
   (d) $u'-x\,u=x\,e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
   (e) $t\,y'+3\,y=\frac{1}{1-t^2}$ sur $]0,1[$.
   (f) $\sin(x)\,y'+\cos(x)\,y=\sin^2(x)$ sur $]0,\pi[$.
3. On demande cette fois-ci de préciser en plus le domaine de définition des solutions.
   (a) $(x\,\ln x)\,y'-y=-\frac{1+\ln x}{x}$.
   (b) $2\,t\,(1-t)v'+(1-t)\,v=1$.
   (c) $2\,x\,y'+y=x^n$ où $n\in\mathbb{N}$.
4. Déterminer en précisant leur domaine de définition, les solutions de
$$(1+t)y'-t\,y=0.$$
   Existe-t-il des solutions de l'équation définies sur $\mathbb{R}$?

5. Résoudre l'équation différentielle :

$$x\,(x-1)\,y' - (3x-1)\,y + x^2\,(x-1) = 0.$$

Etudier les raccordements possibles des solutions en 0 et 1.

6. $\star$ Etablir – sans la résoudre – que l'équation $y' + 2\,x\,y = 1$ admet une solution impaire définie sur $\mathbb{R}$.

7. $\star\star$ Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période 1. On considère l'équation différentielle suivante.

$$y' - v(\theta)\,y = 0 \quad (E).$$

Montrer qu'il existe un unique réel α tel que pour tout solution f de l'équation (E), la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(\theta) = e^{-\alpha\,\theta}\,f(\theta)$ est périodique de période 1.

Les exercices qui suivent sortent des sentiers battus. Ce sont des exemples d'équations différentielles **non linéaires** du premier ordre.

8. $\star$ **Equation de Bernouilli.** Trouver toutes les solutions non nulles de $y' + y - y^2 = 0$.

9. $\star\star$ Résoudre l'équation différentielle $y' = \cos(x + y)$.

10. $\star$ Trouver toutes les solutions ne s'annulant pas de $m\,y' = -A\,y^2$ (équation s'écrivant aussi $m\,\frac{dv}{dt} = -A\,v^2$ où $-A\,v^2$ correspond à la force de frottement fluide d'un corps en mouvement à grande vitesse).

III Equations différentielles du second ordre

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles linéaires (E.D.L.) du second ordre suivantes :

(a) $y'' + 2\,y' + 5\,y = 5\,x$

(b) $-3y'' - 2\,y' + y = \cos(x)$

(c) $-2\,y'' + y' + y = 10\,x\,\cos x$

(d) $y'' + 4\,y' + 4\,y = \left(16\,x^2 + 16\,x - 14\right)\,e^{2x}$

(e) $y'' - 3\,y' + 2\,y = (-3\,x^2 + 10\,x - 7)\,e^x$

(f) $y'' - 4\,y' + 4\,y = x\,\mathrm{ch}(2\,x)$

(g) $y'' + 4\,y = x + \cos(2\,x)$

(h) $y'' - 2\,y' + 5\,y = -4\,e^{-x}\,\cos x + 7\,e^{-x}\,\sin x - 4\,e^x\,\sin(2\,x)$

Les exercices qui suivent sortent des sentiers battus. Ce sont des exemples d'E.D.L. du second ordre à coefficients non constants ou des exemples de système d'équations différentielles linéaires.

2. $\star$ **Equation d'Euler** Etant donnés des nombres réels a et b, on considère l'équation différentielle

$$x^2\,y'' + a\,x\,y' + b\,y = 0.$$

On se propose d'en déterminer les solutions définies sur $]0, +\infty[$. A l'aide du changement de variable $x = e^t$, montrer que l'équation se ramène à la résolution d'une E.D.L. du second ordre à coefficients constants. En déduire les solutions de l'équation d'Euler définies sur $]0, +\infty[$.

3. On se propose de résoudre l'E.D.L. suivante :

$$x\,y'' + 2\,(x+1)\,y' + (x+2)\,y = 0 \quad (E).$$

On pose $z = x\,y$. Montrer que z est solution d'une E.D.L. du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.
En déduire les solutions de l'E.D.L. (E). Sont-elles toutes définies sur $\mathbb{R}$?

4. $\star$ On veut résoudre l'E.D.L. suivante :

$$(1 - x^2)\,y'' - x\,y' + y = 0 \quad (E).$$

(a) En faisant le changement de variable $x = \sin t$, résoudre l'E.D.L. sur $]-1, 1[$.

(b) A l'aide de changement de variables judicieux, résoudre l'équation sur $]-\infty,-1[$ puis sur $]1,+\infty[$.

5. $\star$ Résoudre le système différentiel suivant (Ici x et y sont des fonctions inconnues dépendant de t)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & x'+y'-y \\ y'' & = & x'+y'-x \end{array}\right.$$

6. Le mouvement d'une particule chargée soumise à un champ magnétique dirigé suivant l'axe $(0z)$ est régi par un système différentiel de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & \omega\, y' \\ y'' & = & -\omega\, x' \\ z'' & = & 0 \end{array}\right.$$

où ω dépend de la masse ; de la charge de la particule et du champ magnétique. En considérant la fonction complexe u définie par $u(t)=x'(t)+iy'(t)$, résoudre ce système différentiel.

7. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x)=f(\frac{1}{x}).$$

8. Résoudre l'E.D.L d'ordre 4 suivante :

$$y^{(4)}-2\,y''+y=0.$$