Feuille de TD 7

Géométrie du plan

On supposera le plan affine $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ étant alors une B.O.N directe de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

I Géométrie analytique

Nombre d'exercices figurant à la suite peuvent se résoudre à l'aide de la librairie geometry de Maple.

1. Soient O' et A des points du plan de coordonnées $(3, 1)$ et $(1, -2)$ respectivement. Soit $\overrightarrow{i'}$ le vecteur de $\overrightarrow{P}$ de coordonnées $(1, 2)$.
   (a) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{j'}$ défini par $\widehat{(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})} = \frac{\pi}{2} \bmod [2\pi]$.
   (b) Donner les coordonnées de A dans le repère $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ donnée par
$$-2\,x + 2\,y + 6 = 0.$$
   (a) Donner l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ dans le repère orthonormé direct $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$ où O' est de coordonnées $(2, 1)$ dans $\mathcal{R}$ et $\overrightarrow{i'}$ est le vecteur image de $\overrightarrow{i}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   (b) Déterminer une base orthonormé directe $(\overrightarrow{i''}, \overrightarrow{j''})$ de telle sorte que la droite ait une pente égale à $\frac{1}{2}$ dans le repère $(O', \overrightarrow{i''}, \overrightarrow{j''})$. Donner l'équation de la droite dans ce repère.
3. Soient les points $A(1, 4)$, $B(-4, 2)$, $C(3, -1)$.
   (a) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   (b) Donner une équation cartésienne de la hauteur issue de A.
4. Soient les vecteurs $\overrightarrow{u}(2, 3)$ et $\overrightarrow{v}(-2, -1)$. Calculer l'angle $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ en l'exprimant à l'aide des fonctions circulaires réciproques.
5. Soient les points $A(-1, 0)$, $B(2, 4)$, $C(3, 3)$.
   (a) Quelle est l'aire du triangle ABC ? En déduire la distance d du point A à la droite (BC).
   (b) Donner une équation de la droite (AB). En déduire la longueur de la hauteur issue de C. Retrouver alors l'aire du triangle ABC.
6. Calculer l'aire du triangle ABC où A, B, C ont pour coordonnées respectives : $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 0)$.
7. Soient $A(1, -2)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $3\,x + 4\,y - 1 = 0$. Déterminer la distance de A à $\mathcal{D}$.
8. Soient $A(-3, -1)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 3)$ trois points de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u}(1, 2)$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et B.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ passant par C et dirigée par $\overrightarrow{u}$
   (c) Calculer, s'il existe, le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
9. Déterminer une équation normale de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(3, -1)$ et $B(4, 1)$.
10. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites d'équation $3x + 2y = 1$ et $4x + 3y = 5$. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point Ω dont on donnera les coordonnées.
    Soit $A(-5, 5)$. Donner les coordonnées de B, projeté de A sur $\mathcal{D}$ parallèlement à $\mathcal{D}'$; de C projeté de A sur $\mathcal{D}'$ parallèlement à $\mathcal{D}$.
    Calculer l'aire du parallélogramme $\Omega\,A\,B\,C$.
    En déduire les distances de A à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

11. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équation cartésienne respective $3\,x + 4\,y + 3 =$ et $12\,x - 5\,y + 4 = 0$. Déterminer des équations cartésiennes des bissectrices de ces deux droites.
12. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(2, -1)$ et de rayon 4.
13. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle d'équation cartésienne $x^2+y^2+4\,x-3\,y+6 = 0$.
14. Déterminer les coordonnées, si ceux-ci existent, des points d'intersection du cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

et de la droite d'équation :

$$x + 3y - 2 = 0.$$

15. Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega = (2, -1)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2\,x + y = 0$. Déterminer les droites tangentes à $\mathcal{C}$ et parallèles à $\mathcal{D}$.
16. Soient $A(1, 3)\,B(2, 0)$ et $C(4, -1)$. Donner une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
17. Soient $\mathcal{C}_1$ cercle de centre $\Omega(1, 0)$ et de rayon 1 et $\mathcal{C}_2$ celui de centre $\Omega'(0, 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Soient A et B les points d'intersection des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
    (a) Déterminer une équation de la droite $(A\,B)$.
    (b) Quelle est l'équation d'un cercle passant par A et B ?
    (c) Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle $A\,B\,\Omega'$.
18. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles d'équation cartésienne respective :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 \ : & x^2 + y^2 = 100\ ; \\ \mathcal{C}_2 \ : & x^2 + y^2 - 24\,x - 18\,y + 200 = 0. \end{cases}$$

    On note Ω_1 et Ω_2 leur centre respectif.
    (a) Montrer que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents. Déterminer une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$ en ce point de contact.
    (b) Soient $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ les deux autres tangentes communes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (faire une figure pour s'en convaincre). Montrer que $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ se coupent sur la droite $(\Omega_1\,\Omega_2)$ en un point I vérifiant $\overrightarrow{\Omega_1\,I} = 2\overrightarrow{\Omega_1\,\Omega_2}$. En déduire les coordonnées de I.
    (c) Déterminer les équations cartésiennes de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.
19. Soit Γ l'ensemble des cercles passant par $A(2, 1)$ et tangents à la droite d'équation

$$4\,x - 3\,y - 10 = 0.$$

    Montrer qu'il existe dans Γ un unique cercle de rayon minimal dont on déterminera une équation cartésienne.
20. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites d'équation $x - 2y + 2 = 0$ et $3x - 2y - 2 = 0$ respectivement. Donner l'équation de la droite D'' passant par le point A de coordonnées $(4, -4)$ de telle sorte que les droites D, D' et D'' soient concourantes.
21. *À connaître.* Reconnaître la courbe d'équation polaire

$$\rho = \frac{1}{\cos\theta + 3\,\sin\theta}.$$

    Et celle d'équation polaire

$$\rho = 3\,\cos(\theta) - 4\sin(\theta).$$

II Quelques configurations du plan

1. *À connaître.* Montrer, en employant le produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
2. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit D le milieu du côté $[B, C]$, on note E le projeté orthogonal de D sur (AC).
    Soit F le milieu du segment $[D, E]$. Montrer que les droites (AF) et (BE) sont orthogonales.

3. Montrer que deux cercles $\mathcal{C}$, de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{C}'$, de centre Ω' et de rayon R' se coupent si et seulement si :
$$|R-R'| \leq \Omega\Omega' \leq R+R'.$$

4. *À connaître.* Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Établir les identités remarquables suivantes :
$$\begin{array}{rcl} \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 & = & \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \\ \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 & = & \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \\ \|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2 & = & (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) \end{array}$$

   Soit ABC un triangle direct, on note $a=BC, b=AC, c=AB$, $\hat{A}=\widehat{BAC}, \hat{B}=\widehat{CBA}, \hat{C}=\widehat{ACB}$. Retrouver *la formule d'Al Kâshi* :
$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\,\cos(\hat{A}).$$

5. Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$. On note I le milieu de $[A,B]$ et $d=AI$. On définit une application $f\,:\,\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ par
$$f(M)=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}.$$
   (a) Montrer que l'image de f est $[-d^2,+\infty[$.
   (b) Montrer que les lignes de niveaux de f sont les cercles de centre I et de rayon $\sqrt{d^2+k}$ pour $k\geq -d^2$.
   (c) Retrouver le résultat suivant : *Le lieu des points M de $\mathcal{P}$ vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[A,B]$.*
6. *À connaître.* Donner une construction à la règle et au compas permettant de tracer les tangentes à un cercle issue d'un point situé hors du disque délimité par le cercle.
7. Soient A et B deux points de $\mathcal{P}$. Soit $k\in\mathbb{R}$. Déterminer le lieu C_k des points M vérifiant
$$(AM)^2+(BM)^2=k.$$

8. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles. Deux points M et M' décrivent respectivement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de telle sorte que les tangentes en M et M' soient orthogonales.
   Décrire le lieu du milieu du segment $[M,M']$.
9. Soient Ω et A deux points de $\mathcal{P}$. Trouver le lieu des centres des cercles qui passent par A et pour lesquels les tangentes issues de Ω sont orthogonales.

III Nombres complexes en action

1. Étant donné $z\in\mathbb{C}^*$, on note A, A', M, M', N les points d'affixe respectif $1, -1, z, \frac{1}{z}, \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$.
   Montrer que la droite (MM') est bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NA'}})$.
2. Déterminer $a\in\mathbb{C}$ tel que l'ensemble
$$\{z\in\mathbb{C}\mid a\,z+\bar{z}+1+i=0\}$$
   soit une droite.
3. Soient ABC un triangle équilatéral et M un point du cercle circonscrit à ABC appartenant à l'arc BC ne contenant pas A. Établir l'égalité :
$$AM=BM+CM.$$

4. Soient A, B, C trois points de $\mathcal{P}$ d'affixe respectif a, b, c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si
$$a+j\,b+j^2\,c=0$$
   On distinguera les cas où ABC est direct et ABC indirect. Pour mémoire $j=e^{\frac{2i\Pi}{3}}$.

5. Soit ABC un triangle direct du plan. On construit à l'extérieur de ce triangle, les trois triangles équilatéraux de $[A,B],[B,C],[C,A]$. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral (On pourra utiliser l'exercice précédent).
6. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :
   (a) $\frac{z-1-i}{z+1} \in \mathbb{R}$.
   (b) L'origine O est l'orthocentre du triangle formé des points d'affixe z, z^2 et z^3.
   (c) Les points d'affixe i, z, iz forment un triangle équilatéral.
   (d) Les points d'affixe i, i, iz forment un triangle rectangle isocèle en i.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ les racines $n+1$-ièmes de l'unité et $A_0, \ldots, A_n$ leur image respective dans $\mathcal{P}$.
   Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient :
$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{MA_k} \right\| = n, \quad \sum_{k=0}^{n} \left\| \overrightarrow{MA_k} \right\|^2 = 2n.$$
8. Soient a, b et c trois nombres réels vérifiant :
$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c &= 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c &= 0 \end{cases}$$
   Établir que a, b et c vérifient également :
$$\begin{cases} \cos(2\,a) + \cos(2\,b) + \cos(2\,c) &= 0 \\ \sin(2\,a) + \sin(2\,b) + \sin(2\,c) &= 0 \end{cases}$$
9. *À connaître.* Montrer que quatre points du plan A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si leurs affixes a, b, c et d vérifient :
$$\frac{c-a}{c-b}\,\frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R}.$$
   Le nombre complexe $\frac{c-b}{c-a}\,\frac{d-a}{d-b}$ noté $[a,b,c,d]$ est appelé le birapport des complexes a, b, c et d.
10. Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes a, b, c et d respectivement, formant un quadrilatère convexe.
   (a) Montrer l'identité suivante :
$$(a-b)\,(c-d) + (b-c)\,(a-d) = (a-c)\,(b-d).$$
   (b) En déduire l'inégalité de Ptolémée :
$$AC \times BD \leq AB \times CD + AD \times BD,$$
   qui se traduit par : *Dans un quadrilatère convexe, le produit des longueurs des diagonales est inférieur ou égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés*
   (c) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $ABCD$ est inscriptible. On a donc établi le théorème de Ptolémée : *Un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés*

IV Transformations du plan

1. *À connaître.* Montrer qu'une symétrie orthogonale par rapport à droite passant par l'origine O envoie M d'affixe z sur M' d'affixe $e^{i\theta}\,\overline{e^{-i\theta}\,z}$ où θ est un nombre réel que l'on précisera.
2. Soit $ABCD$ un carré dont les sommets C et D ont des coordonnées entières. Montrer que les coordonnées de A et B sont entières.

3. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centre Ω_1 et Ω_2 respectivement. Soient R_1 et R_2 leur rayon respectif, on suppose $R_2 > R_1$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique homothétie h vérifiant
   $$h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2.$$
   On note Ω et k le centre et le rapport de l'homothétie.
   (b) Montrer que si $\mathcal{C}_1$ se situe à l'intérieur du disque fermé D_2 de centre Ω_2 et de rayon R_2, alors Ω est contenu dans le disque fermé D_1 de centre Ω_1 et de rayon R_1.

   On se place dans la situation où les disques ne sont pas inclus l'un dans l'autre.
   (c) Montrer que Ω appartient au complémentaire de $D_1 \cup D_2$.
   (d) En déduire qu'il existe exactement deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ issues de Ω et tangentes à $\mathcal{C}_1$.
   (e) Montrer que D_1 et D_2 sont tangentes à $\mathcal{C}_2$.
4. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points du plan $\mathcal{P}$. On veut déterminer s'il existe n points $M_1, \ldots, M_n$ de telle sorte que A_1 soit le milieu du segment $[M_1, M_2]$,... ,A_{n-1} le milieu du segment $[M_{n-1}, M_n]$ et A_n celui de $[M_n, M_1]$.
   On note s_i la symétrie centrale de centre A_i.
   (a) Montrer que si de tels points M_i existent, alors $M_1 = (s_n \circ \cdots \circ s_1)(M_1)$.
   (b) Soient s et s' deux symétries centrales de centre Ω et Ω' respectivement. Quelle est la transformation du plan $s' \circ s$?
   (c) En déduire que si n est impair, alors $s_n \circ \cdots \circ s_1$ est une symétrie centrale. Conclure à l'existence et l'unicité des points $M_1, \ldots, M_n$ dans le cas où n est impair.
   (d) Montrer que si n est pair, il y a existence d'une telle famille de points $M_1, \ldots, M_n$ si et seulement si
   $$\overrightarrow{A_1\, A_2} + \overrightarrow{A_3\, A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}\, A_n} = \overrightarrow{0}.$$
   (e) Étant donnés A, B, C, déterminer une construction qui donne les points M, N et P précédemment définis. Retrouver le résultat suivant :
   Les hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes.
   (f) Établir le théorème de Varignon :
   Pour que quatre points du plan soient les milieux d'un quadrilatère, il faut et il suffit qu'ils soient les sommets d'un parallélogramme.