

Q C M

*Qu'avez-vous retenu de l'année écoulée?*

Cochez les affirmations exactes. Parmi les réponses proposées, il y a au plus deux réponses exactes. Quand vous estimez, qu'aucune des trois propositions formulées n'est vraie, cochez la case aucun(e).

ANALYSE

1. Une primitive de  $t \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  sur  $] -1, 1[$  est :  
  $t \mapsto \operatorname{arctg} t$      $t \mapsto \operatorname{argch} t$      $t \mapsto \arcsin t$     aucune
2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $ty'(t) = y(t) + t$  sur  $] -\infty, 0[$  est :  
  $\{t \mapsto \lambda t | \lambda \in \mathbb{R}\}$      $\{t \mapsto t + \lambda \ln(t) | \lambda \in \mathbb{R}\}$      $\{t \mapsto \lambda t + \mu \ln t | (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$     aucun
3. La solution de  $y''(t) + 4y(t) = t \exp(2t)$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = -\frac{1}{16}$  est :  
  $t \mapsto \frac{1}{16} (\exp(t) - \exp(2t))$      $t \mapsto \frac{1}{16} (\sin(2t) - t \exp(t))$   
  $t \mapsto \frac{1}{16} t \exp(2t) (2t - 1)$     aucune.
4. Les suites  $(u_n)_n$  suivantes sont convergentes  
  $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$      $u_{n+1} = u_0 + \dots + u_n$  avec  $u_0 = 1$      $u_n = \frac{n^n}{n!}$     aucune.
5. Soit  $n \geq 2$  un entier. Si  $P$  est une fonction polynomiale de degré  $n$  ayant  $n$  racines réelles simples alors les propriétés suivantes sont vraies :  
  $P'$  est à racines simples     $P'$  a  $(n - 1)$  racines réelles     $P \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$     aucune.
6. Les inégalités suivantes sont vraies :  
  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}$      $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$   
  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$     aucune.
7. Les équivalents suivants sont vraies :  
  $\exp(-x^2) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2$      $\tan x \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$      $\sqrt{1 + \exp(x)} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \exp(\frac{x}{2})$     aucun.
8. Soit  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1 \text{ et } y \geq 0\}$  et  $\gamma$  la courbe paramétrée fermée simple délimitant  $T$  et parcourue dans le sens trigonométrique. Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $F(x, y) = (y^2, x^2)$ . Les propriétés suivantes sont vraies :  
  $\oint_{\gamma} F = 2 \int_{-1}^1 (\int_0^{1-|x|} (x - y) dy) dx$      $\oint_{\gamma} F = 1$      $\oint_{\gamma} F = \int_0^1 (\int_{-y}^y (x - y) dx) dy$     aucune.

ALGÈBRE LINÉAIRE

1. Les familles de vecteurs suivantes sont libres :  
  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  dans  $\mathbb{R}^3$      $(x \mapsto \exp(x), \dots, x \mapsto \exp(nx))$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .  
  $(X(X + 1), X(X + 2), (X + 1)(X + 2))$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$     aucune.
2. Les familles de vecteurs suivantes sont génératrices :  
  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  dans  $\mathbb{R}^3$      $(1, X, \dots, X^n)$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .  
  $(I_2, A, A^2, A^3)$  dans  $M_2(\mathbb{R})$  avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$     aucune.

3. les familles de vecteurs suivantes sont des bases :

- $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  dans  $\mathbb{R}^3$ 
  $(x \mapsto \exp(x), \dots, x \mapsto \exp(nx))$  dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .  
  $(X(X+1), X(X+2), (X+1)(X+2))$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$ 
 aucune.

4. L'application linéaire  $\psi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui à  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  associe  $(P(0), P(1), P(2))$  est :

- un endomorphisme
  un isomorphisme  
 un automorphisme
  aucun.

5. L'application linéaire  $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\psi(x, y, z, t) = (x + y + z, y + z + t, t - x)$  a les propriétés suivantes :

- le rang de  $\psi$  est 2
   $\ker(\psi) = \text{vect}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right)$   
  $\text{Im}(\psi) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid w = v - u \right\}$ 
 aucune.

6. Soient  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  et  $\mathcal{B}' = ((X+1)X, X(X-1), (X-1)(X+1))$ . On admet que ce sont des bases de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Soit  $\psi \in \text{End}(\mathbb{R}_2[X])$  définie par  $\psi(P) = P(-1) + P(0)X + P(1)X^2$ .

On a les propriétés suivantes :

- $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  =  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 
  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  =  $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   
  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\Psi)$  =  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 
 aucune.

7. Les exemples qui suivent sont des produits scalaires dans  $\mathbb{R}_2[X]$

- $\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} P(0)Q(0)$ 
  $\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (P(0) + Q(0))Q(0)$   
  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .
  aucun.

8. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $A$ .

Alors  $u$  v\u00e9rifie les propri\u00e9t\u00e9s suivantes :

- $u$  est un automorphisme orthogonal
   $u$  est une rotation  
  $u$  est une r\u00e9flexion
  aucune.

## G\u00c9OM\u00c9TRIE

1. Soient  $A(1, 1, 1)$ ;  $D$  la droite passant par  $C(1, 0, -1)$  et dirig\u00e9e par le vecteur  $\vec{u} = (1, 0, 1)$ ;  $H$  le plan perpendiculaire \u00e0  $D$  passant par  $A$ . On a les propri\u00e9t\u00e9s suivantes

- $D$  a pour \u00e9quations cart\u00e9siennes  $\begin{cases} z - x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ 
 la distance de  $A$  \u00e0  $D$  est \u00e9gale \u00e0 1  
  $H$  a pour \u00e9quation  $x - z = 0$ .
  aucune.

2. La courbe d'\u00e9quation polaire  $\rho = 1 + \cos(\theta)$  a les propri\u00e9t\u00e9s suivantes

- $(0, 0)$  est l'unique point singulier
   $(0, 0)$  est un point d'inflexion  
 La courbe param\u00e9tr\u00e9e est sym\u00e9trique par rapport \u00e0  $(0y)$ 
 aucune.

3. La courbe d'\u00e9quation  $x^2 + xy + y^2 = 1$  v\u00e9rifie les propri\u00e9t\u00e9s suivantes :

- c'est une ellipse
  Elle admet  $(0, 0)$  comme centre de sym\u00e9trie  
 l'excentricit\u00e9 est \u00e9gale \u00e0  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 
 aucune.