

Fonctions de deux variables réelles : Champ de vecteurs et potentiel

19 juin 2011

On rappelle qu'un champ de vecteurs sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 est une application $\vec{F} = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

On supposera dans la suite les champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 , sauf mention explicite du contraire.

CHAMP DE VECTEURS DÉRIVANT D'UN POTENTIEL SCALAIRE

Définition 1 Soit $\vec{F} = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur U .

On dit que $\vec{F} = (P, Q)$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U tel que

$$\forall (x, y) \in U, \vec{F}(x, y) = \mathbf{Grad}V(x, y).$$

Par exemple \vec{F} défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ dérive du potentiel scalaire

$$\begin{aligned} V &: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} \end{aligned} .$$

Remarque :

- Si \vec{F} dérive d'un potentiel scalaire V , on a donc pour tout $(x, y) \in U$:

$$P(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) \text{ et } Q(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x, y).$$

- Il en découle que V est de classe \mathcal{C}^2 sur U . Le lemme de Schwarz entraîne alors la **condition nécessaire** suivante pour que \vec{F} dérive d'un potentiel scalaire :

$$\forall (x, y) \in U, \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

La condition nécessaire trouvée est une condition suffisante à condition de faire des hypothèses supplémentaires sur la géométrie de l'ouvert U .

Définition 2 (Ouvert étoilé) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. On dit que U est étoilé s'il existe $(x_0, y_0) \in U$ tel que pour tout $(x, y) \in U$, le segment joignant (x_0, y_0) à (x, y) soit contenu dans U .

EXEMPLE :

1. Une boule ouverte est un ouvert étoilé ;
2. Un demi-plan ouvert est un ouvert étoilé ;
3. En revanche \mathbb{R}^2 privé d'un point est un exemple d'ouvert qui n'est pas étoilé.

Théorème 1 (lemme de Poincaré) Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert étoilé et $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur U .
Si le champ de vecteurs $\vec{F} = (P, Q)$ vérifie :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y),$$

alors \vec{F} dérive d'un potentiel scalaire sur U .

On prendra garde que cette condition n'assure plus l'existence de potentiel scalaire si l'ouvert U n'est plus supposé étoilé. L'exemple qui suit met en défaut l'existence de potentiel dans le cas où l'ouvert U n'est pas étoilé.

EXEMPLE : Soit $\vec{F} = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

On vérifie que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On vérifie également que l'intégrale curviligne¹ de \vec{F} le long du cercle trigonométrique est égale à $2\pi \neq 0$, mettant en défaut l'existence d'un potentiel scalaire dont dériverait \vec{F} (cf. Théorème 2).

INTÉGRALE CURVILIGNE : NOTION DE FLUX

Il faut d'abord préciser le type d'arcs paramétrés sur lesquels définir la notion d'intégrale curviligne.

Définition 3 (arc paramétré \mathcal{C}^1 par morceaux) Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré.

On dit que γ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur le segment $[a, b]$ si

1. γ est continue sur $[a, b]$;
2. il existe une subdivision^a $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ du segment $[a, b]$ telle que $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ est de classe \mathcal{C}^1 pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

^aAppelée subdivision adaptée à γ .

EXEMPLE :

1. une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 est de fait de classe \mathcal{C}^1 par morceaux ;
2. une ligne brisée est une courbe paramétrée de \mathcal{C}^1 par morceaux ;
3. un « carré » ou un « triangle » sont des courbes paramétrées de \mathcal{C}^1 par morceaux.

¹Correspond à la notion de travail le long d'un chemin

Définition 4 (Intégrale curviligne le long d'un chemin)

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^0 sur U .

1. si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 , alors l'in-
- $$t \mapsto (x(t), y(t))$$

tégrale curviligne de \vec{F} le long de γ notée $\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ est le nombre réel :

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

2. si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est classe \mathcal{C}^1 par morceaux de subdivision adaptée $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$, alors l'intégrale curviligne de \vec{F} le long de γ notée $\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ est le nombre réel :

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

Remarque :

1. Dans le cas où $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est de classe \mathcal{C}^1 , on a :

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} dt$$

2. Dans le cas où $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la valeur de l'intégrale curviligne le long de γ ne dépend pas de la subdivision adaptée considérée.

Le choix de la paramétrisation de l'arc paramétré n'influe pas sur la valeur de l'intégrale curviligne, à condition que le sens de parcours soit le même. Plus précisément :

Propriété 1 Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 par morceaux ; $\vec{F} = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs continu et $s : [u, v] \rightarrow [a, b]$ une bijection de classe \mathcal{C}^1 .

Alors :

- $\int_{\gamma \circ s} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ si s est strictement croissante (autrement dit on parcourt la courbe dans le même sens que γ) ;
- $\int_{\gamma \circ s} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ si s est strictement décroissante (autrement dit on parcourt la courbe dans le sens opposé à γ).

On dit qu'un arc paramétré $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$. On peut caractériser un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel scalaire à l'aide du flux du champ de vecteurs le long de chemins fermés noté $\oint_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$:

Théorème 2 (Admis) Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\vec{F} = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs continu sur U . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) le champ de vecteurs \vec{F} dérive d'un potentiel sur U ;
- (ii) pour tout arc paramétré $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ fermé, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux :

$$\oint_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

EXEMPLE : Soit $\vec{F} = (P, Q)$ le champ de vecteurs défini sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ et $Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$; $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$ l'arc paramétré défini par $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. On a :

$$\int_{\gamma} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = 2\pi.$$

FORMULE DE GREEN-RIEMANN

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée fermée. On dit que :

- γ est simple si la restriction de γ à $]a, b[$ est injective ;
- γ est orienté positivement si le sens de parcours de la courbe est dans le sens trigonométrique.

Théorème 3 (Formule de Green-Riemann) Soit D un domaine contenu dans Ω délimité par une **courbe fermée simple** $\widehat{\partial D}$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et orientée positivement^a. Alors

$$\oint_{\widehat{\partial D}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

^aLorsque l'arc paramétré est birégulier, l'arc paramétré est orienté positivement si et seulement si $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} > 0$ pour tout $t \in [a, b]$

La formule de Green-Riemann peut être employée pour calculer l'aire d'une région délimitée par une courbe fermée, simple de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et orientée positivement.

EXEMPLE : Calcul de l'aire de la région D délimitée par l'astroïde d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$

Posant $F(x, y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve :

$$\int_D dx dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy \stackrel{\text{Green-Riemann}}{=} \oint_{\widehat{\partial D}} -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy.$$

Mais l'intégrale curviligne est égale à :

$$\begin{aligned} \oint_{\widehat{\partial D}} -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy &= \int_0^{2\pi} -\frac{\sin^3 t}{2} (-3 \sin(t) \cos^2(t)) + \frac{\cos^3 t}{2} (3 \cos(t) \sin^2(t)) dt \\ &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt \end{aligned}$$

Après linéarisation de l'intégrande, on trouve que l'aire de la région délimitée par l'astroïde est égale à $\frac{3\pi}{8}$.