

# Fonctions de deux variables réelles : exemples d'EDP

20 juin 2011

Certains phénomènes physiques peuvent être décrits à l'aide de modèles conduisant à la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP).

Nous contenterons ici de décrire l'ensemble des solutions de quelques équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 1 et 2.

## I EQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y)$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$  où  $\Omega$  est un ouvert supposé convexe<sup>1</sup> par commodité. Il s'agit de déterminer l'ensemble des fonctions  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f(x, y).$$

Nous allons considérer des situations particulières pour le second membre, la situation générale étant hors-programme. On pourra remarquer que pour déterminer l'ensemble des solutions de l'EDP, il suffit d'en déterminer une *solution particulière*, les autres solutions s'obtenant en y ajoutant une solution de l'équation sans second membre  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

### 1. Equation aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

N'ayant pas de restriction sur l'ouvert convexe  $\Omega$ , on peut résoudre l'EDP sur  $\mathbb{R}^2$  pour simplifier. Ceci dit le raisonnement ne change pas en toute généralité.

Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , la fonction partielle  $u(\cdot, y)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée identiquement nulle. Ainsi la fonction partielle  $u(\cdot, y)$  est constante, sa valeur dépendant de  $y$  bien entendu.

Il existe donc  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, u(x, y) = \varphi(y).$$

Puisque  $u$  est supposée de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ceci entraîne que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

On en déduit immédiatement que l'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'EDP est :

$$\mathcal{S}_0 = \{u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, u(x, y) = \varphi(y)\}$$

**Remarque :** Si l'ouvert  $\Omega$  n'est pas supposé convexe, l'ensemble des solutions trouvé change du tout au tout. Déterminer cet ensemble de solutions lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$

<sup>1</sup>cf. [http://www.cpgpe-brizeux.fr/casiers/erd/1011/Cours/fct\\_convexe.pdf](http://www.cpgpe-brizeux.fr/casiers/erd/1011/Cours/fct_convexe.pdf)

## 2. Equation aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x} = g(x) h(y)$

On suppose  $g$  et  $h$  définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Posons :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, u_0(x, y) = \left( \int_0^x g(t) dt \right) h(y).$$

On vérifie sans peine que  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et qu'elle vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) = g(x) h(y).$$

On en déduit alors l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  de l'EDP :

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) \mapsto \left( \int_0^x g(t) dt \right) h(y) + \varphi(y) : \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$

## II EQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

Il s'agit cette fois-ci de déterminer les fonctions  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

Posant  $v = \frac{\partial u}{\partial y}$  cela revient à dire que  $v$  vérifie  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . Il en résulte qu'il existe  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tel que  $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(y)$ .

L'analogie avec ce qui précède entraîne l'existence de  $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, u(x, y) = \Psi(x) + \int_0^y \varphi(s) ds.$$

Puisque  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $y \mapsto \Phi(y) = \int_0^y \varphi(s) ds$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Par ailleurs  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  puisque  $u$  est supposée de classe  $\mathcal{C}^2$ .

On en déduit immédiatement que l'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'EDP est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ (x, y) \mapsto \Psi(x) + \Phi(y) : (\Psi, \Phi) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}.$$

## III EQUATION DES ONDES UNIDIMENSIONNELLE

### 1. Etude des vibrations d'une corde

L'équation (1) appelée équation des ondes unidimensionnelle (ou équation de D'Alembert) décrit le mouvement d'une corde<sup>2</sup> soumise à des vibrations transversales se propageant à une vitesse  $c > 0$  le long de la corde (propagation d'une onde transverse le long de l'axe  $(Ox)$ ).

Si on note  $u(x, t)$  l'écartement vertical de la corde en  $x$  à l'instant  $t$ , on peut montrer que  $u$  vérifie :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

<sup>2</sup>Que vous aurez l'occasion d'étudier l'an prochain et que vous pourrez revoir dans ce polycopié <http://www.cpge-brizeux.fr/casiers/jnb/cours/physondes/chp01.pdf> ou celui-ci <http://www.cpge-brizeux.fr/casiers/francoise/cours/ondes/CHondes1.pdf>

## 2. Résolution de l'équation de D'Alembert

On veut déterminer l'ensemble des fonctions  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  solutions de l'équation des ondes unidimensionnelle.

La détermination de ces solutions est un préalable à l'étude des vibrations d'une corde de longueur  $L > 0$  où on a la contrainte supplémentaire  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  pour tout  $t > 0$  contrainte signifiant que les bouts de la corde sont fixés. Vous verrez comment procéder l'an prochain : vous verrez apparaître ainsi les harmoniques ...

### L'ensemble des solutions vu comme noyau d'un opérateur linéaire

On considère l'opérateur différentiel noté  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  qui à  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  associe  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  qui appartient à  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

L'opérateur différentiel  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  est une application linéaire de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  vers  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Le noyau de  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  est précisément l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  de (1).

### Factorisation de l'opérateur

On note  $\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$  et  $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$  les opérateurs différentiels linéaires qui à  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  associent respectivement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t},$$

qui appartiennent à  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . On vérifie à l'aide du théorème de Schwarz que :

$$\forall u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (2)$$

On peut réécrire (2) à l'aide des opérateurs sous la forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

**Vers la détermination des solutions** L'idée est de faire un changement de variables indépendantes pour la fonction inconnue  $u$ .

Posons  $x = y + s$  et  $t = -\frac{y}{c} + \frac{s}{c}$  ce qui conduit à poser

$$\forall (y, s) \in \mathbb{R}^2, \quad v(y, s) = u\left(y + s, \frac{s - y}{c}\right).$$

On vérifie que  $v$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que

$$\forall (y, s) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(y, s) = \frac{\partial u}{\partial x}(y, s) - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(y, s),$$

ainsi que

$$\forall (y, s) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial v}{\partial s}(y, s) = \frac{\partial u}{\partial x}(y, s) + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(y, s).$$

On en déduit que  $u$  est solution de (1) si et seulement si  $v$  est solution de :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial s} = 0.$$

Or  $v$  s'écrit<sup>3</sup> :  $\forall (y, s) \in \mathbb{R}^2, \quad v(y, s) = f(2y) + g(2s)$  où  $f$  et  $g$  sont des fonctions définies et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . Puisque  $v = u \circ \Psi$  où  $\Psi$  est l'automorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $\Psi(y, s) = \left(y + s, \frac{s - y}{c}\right)$  d'inverse  $\Psi^{-1}(x, t) = \left(\frac{x - ct}{2}, \frac{x + ct}{2}\right)$ , on trouve que  $u$  s'écrit :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

<sup>3</sup>On a posé  $\Psi(y) = f(2y)$  et  $\Phi(s) = g(2s)$  ce qui ne change rien fondamentalement.

D'où l'on déduit l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  de l'équation des ondes unidimensionnelle :

$$\mathcal{S} = \{(x, t) \mapsto f(x - ct) + g(x + ct) : (f, g) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}.$$

La décomposition ci-dessus d'une onde transversale  $u$  de vitesse de propagation  $c > 0$  s'interprète en disant que l'onde est la superposition d'une onde progressive  $((x, t) \mapsto f(x - ct))$  et d'une onde régressive  $((x, t) \mapsto g(x + ct))$ .