Programme de colles

quinzaine 1
semaine 2

du 27.09.10 au 01.10.10

Les points *soulignés* sont à privilégier comme définition ou propriété de cours.
Les points suivis de la mention **[preuve]** sont à privilégier comme démonstrations de cours.

Pour chaque étudiant une question de cours doit être systématiquement posée en début de colle :
donner une *définition* ou énoncer une *propriété* avec précision, voire une démonstration d'un point en **[gras]**.
Tout énoncé de proposition doit être particulièrement PRÉCIS.

ch. 1 : Intégrales de Riemann, intégrales impropres, fonctions intégrables

Cadre : On considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Intégrale convergente sur un intervalle réel I (borné ou non).
- Nature des intégrales de fonctions usuelles :
  $\displaystyle\int_{[1,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ CV ssi $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}t}{t^\beta}$ CV ssi $\beta < 1$, $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} e^{\gamma t}\mathrm{d}t$ CV ssi $\gamma < 0$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ CV. **[preuves]**
- Cas des fonctions positives. Théorème de comparaison.
- Intégrale absolument convergente. Intégrabilité et relations de comparaison entre fonctions.

ch. 2 : Espaces vectoriels et applications linéaires

- famille libre, génératrice, sommes directes.
- Sous-espaces supplémentaires. Cas de la dimension finie. Projecteurs. Base adaptée à une décomposition en somme directe.
- Application linéaire, image, noyau, théorème d'isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image. Cas de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- Interpolation de Lagrange : les étudiants doivent savoir écrire les expressions des polynômes (L_i) qui interpolent les (y_i) aux points (a_i) 2 à 2 distincts.
- Equations linéaires. Lien entre formes linéaires et hyperplans. Equations d'hyperplans en dimension finie.
- Trace d'un endomorphisme, propriétés usuelles. Trace d'un projecteur.

ch. 3 : Séries de nombres complexes ou réels

- Rappels sur les suites : suites géométriques, suites adjacentes.
  Méthode du point fixe contractant : convergence d'une suite récurrente vers un point fixe pour une application k-lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$.
- Série, sommes partielles. Nature d'une série. Espace vectoriel des séries convergentes.
- *Séries géométriques* :**[nature]**.
  CNS de convergence d'une séries à termes positifs.
  Séries de Riemann.
  Comparaison série-intégrale.
  Critère spécial des séries alternées **(avec majoration du reste).**
- *Formule de Stirling* **(démonstration non exigible).**
- **comparaison de séries (encadrement, relations de comparaison $O(\dots)$, $o(\dots)$).**

A venir :

Espace vectoriel des séries convergentes. Séries absolument convergentes. Séries exponentielles, produits de Cauchy. Déterminants.