Devoir Maison n°2

au plus tard pour le jeudi 23/09/2010

Ce devoir maison peut être cherché et rédigé à plusieurs

Exercice 1

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$.

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Donner un équivalent de f au voisinage de 0. En déduire que f est intégrable au voisinage de 0.
3. Dominer f au voisinage de $+\infty$ par une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.
4. Conclure que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

Problème 1

On se place dans l'espace usuel dont on notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des points, E l'ensemble des vecteurs, et $\overrightarrow{0}$ le vecteur nul. $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Si $M \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$, on pourra noter $M = (x;y;z)$ et $\overrightarrow{OM} = (x;y;z)$.

On introduit les vecteurs $\overrightarrow{i}\,' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$, $\overrightarrow{j}\,' = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}\,' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$.

On note Π le plan vectoriel d'équation cartésienne $x + z = 0$.

Partie A :

1. Montrer que $(\overrightarrow{i}\,', \overrightarrow{j}\,')$ est une base orthonormée de Π, et que $\overrightarrow{k}\,'$ est un vecteur orthogonal à Π.
   En déduire que $B' = (\overrightarrow{i}\,', \overrightarrow{j}\,', \overrightarrow{k}\,')$ est une base orthonormale de l'espace.
2. On désigne par $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Soit $\overrightarrow{e} \in E$.
   Prouver que $\overrightarrow{e} = (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{i}\,')\overrightarrow{i}\,' + (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{j}\,')\overrightarrow{j}\,' + (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k}\,')\overrightarrow{k}\,'$.
3. On considère ici une application linéaire $u : E \to E$ telle que $\Pi \subset ker(u)$.
   (a) Prouver qu'il existe $\overrightarrow{z} \in E$ tel que $u(\overrightarrow{e}) = (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k}\,')\overrightarrow{z}$, pour tout $\overrightarrow{e} \in E$.
   (b) Réciproquement, montrer qu'une application u donnée par la formule précédente (pour un $\overrightarrow{z}$ fixé) est un endomorphisme de E tel que $\Pi \subset ker(u)$.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\overrightarrow{z}$ pour que $\Pi = ker(u)$. Donner dans ce cas le rang et l'image de u.

Partie B :

On note ici $p : E \to E$ le projecteur orthogonal sur le plan Π, B la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, B' la base $(\overrightarrow{i}\,', \overrightarrow{j}\,', \overrightarrow{k}\,')$. On introduit les matrices $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier très rapidement que M' est la matrice de p dans la base B'.
2. Donner la matrice de passage P de la base B a la base B' ainsi que son inverse ?
   (*indication :* on pourra utiliser une relation liant P et ${}^tP$, P étant orthogonale).
3. Soit M la matrice de p dans la base B :
   (a) Justifier sans calcul que $M^2 = M$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(M+I)^n = I + (2^n - 1)M$.
   (c) Exprimer M en fonction de P, P^{-1} et M'. Ensuite, calculer explicitement M.
4. On peut traiter cette partie sans avoir trouvé explicitement M. On introduit l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices du type $M_{a,b} = aM + bI$, où a et b sont réels.
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ muni des lois usuelles sur les matrices a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.
   (b) Les réels a et b etant donnés, exprimer $M_{a,b}$ en fonction de P, P^{-1} , I et M'. En déduire une forme factorisée du déterminant de $M_{a,b}$ ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit inversible.
   (c) Déterminer les réels e et f tels que $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{e,f}$.
   (d) Lorsque $M_{a,b}$ est inversible, exprimer son inverse sous la forme d'un elément de $\mathcal{M}$.