

Ce devoir maison peut être cherché et rédigé à plusieurs

Exercice 1

Nature et somme éventuelle de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 2

Nature et somme éventuelle de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(1+i)^k}{2^k}$.

Exercice 3 Méthode du point fixe contractant

n'hésitez pas à relire le polycopié sur les suites

Soient $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Justifier que f est dérivable sur I , et calculer sa dérivée en tout point de I .
2. En déduire que f' est bornée sur I et que $\max_{x \in I} |f'(x)| = 1$.
3. à l'aide de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$, montrer que 0 est l'unique réel p de I tel que $f(p) = p$.
4. En déduire que f' est bornée sur $J = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et que $\max_{x \in I} |f'(x)| < 1$.
5. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel $k \in [0, 1[$ tel que : $\forall x \in J$, $|f(x)| \leq k|x|$
6. Montrer que $f(J) \subset J$.
7. Soit $x_0 \in J$ fixé. Justifier que l'on peut définir une suite (x_n) par récurrence en posant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq \frac{\pi k^n}{4}$. En déduire la nature de (x_n) .
9. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x_k\right)_N$ tend vers 0.

→ T.S.V.P.

Problème 1

Notations

On désigne par \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels, par \mathbb{N} l'ensemble des nombres entiers naturels et par \mathbb{N}^* l'ensemble \mathbb{N} privé de 0.

Pour n dans \mathbb{N}^* , on note $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$.

Pour n dans \mathbb{N}^* , on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans \mathbb{R} . Etant donné une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\det(A)$ le déterminant de la matrice A . La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A . On note I_n la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

Partie I.

I.1. Soit θ un réel. On considère la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$x_1 = \sin(\theta),$$

$$-2x_1 \cos(\theta) + x_2 = 0,$$

$$\text{et pour tout } p \geq 1, x_p - 2x_{p+1} \cos(\theta) + x_{p+2} = 0.$$

I.1.1. Déterminer x_2 . Pour tout p dans \mathbb{N}^* , expliciter x_p en fonction de p et de θ .

I.1.2. Soit n dans \mathbb{N}^* , à quelle condition sur θ a-t-on $x_{n+1} = 0$?

Pour t réel, on note $A_n(t) = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

(1) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ les coefficients de la diagonale sont $a_{i,i} = 2t$;

(2) pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|i - j| = 1$, $a_{i,j} = 1$;

(3) dans tous les autres cas $a_{i,j} = 0$.

On note $d_n(t) = \det(A_n(t))$.

I.2. Quelques valeurs de $d_n(t)$.

I.2.1. Calculer $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_3(t)$, $d_4(t)$.

I.2.2. Pour $n \geq 3$, établir une relation entre $d_n(t)$, $d_{n-1}(t)$ et $d_{n-2}(t)$. En déduire que d_n est un polynôme en t , déterminer son degré ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

I.3. On suppose $|t| < 1$ et on note $t = \cos(\theta)$ avec $0 < \theta < \pi$.

I.3.1. Montrer que $d_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

I.3.2. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $d_n(\cos(\theta)) = 0$.

I.4. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $\chi_n(\lambda) = \det(A_n(0) - \lambda I_n)$ (N.B. : χ_n est appelé le polynôme caractéristique de la matrice $A_n(0)$).

I.4.1. Exprimer $\chi_n(\lambda)$ en fonction de d_n et de λ .

I.4.2. Déduire de I.3.2. que χ_n possède n racines distinctes et donner ces valeurs. Montrer que la plus grande de ces valeurs est $\rho = 2 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.

I.4.3. En utilisant I.1.2, déterminer un vecteur V dont toutes les composantes sont strictement positives et tel que $AV = \rho V$, où $\rho = 2 \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.