

## *Ce devoir maison peut être cherché et rédigé à plusieurs*

### Exercice 1 Un calcul de déterminant

#### Notations.

Etant donnée une matrice  $A$ , la notation  $A = (a_{i,j})$  signifie que  $a_{i,j}$  est le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice  $A$ . Pour tout entier naturel, on note  $n!$  la factorielle de  $n$ , avec la convention  $0! = 1$ .

Soient  $p$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $p \leq k \leq n$  :

– on note  $\llbracket p, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers  $k$  tels que  $p \leq k \leq n$ .

– on rappelle la notation  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

#### I.1. Déterminant $d_p$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $A_p = (a_{i,j})$  la matrice carrée de  $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$  dont le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  est égal à  $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$  avec  $(i,j) \in \llbracket 1, n-p+1 \rrbracket \times \llbracket 1, n-p+1 \rrbracket$ . On note  $d_p = \det(A_p)$ .

I.1.1. Expliciter les entiers  $r$  et  $s$  tels que  $a_{i,j} = \binom{r}{s}$  pour les quatre coefficients  $a_{1,1}$ ,  $a_{1,n-p+1}$ ,  $a_{n-p+1,1}$  et  $a_{n-p+1,n-p+1}$ .

I.1.2. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$  calculer les déterminants  $d_n$ ,  $d_{n-1}$  et  $d_{n-2}$ .

I.1.3. On suppose que la matrice  $A_p$  possède au moins deux lignes. On note  $L_i$  la ligne d'indice  $i$ .

I.1.3.1 Dans le calcul de  $d_p$  on effectue les opérations suivantes : pour  $i$  variant de  $n-p+1$  à 2, on retranche la ligne  $L_{i-1}$  à la ligne  $L_i$  (opération notée  $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ ). Déterminer le coefficient d'indice  $(i,j)$  de la nouvelle ligne  $L_i$ .

I.1.3.2 En déduire une relation entre  $d_p$  et  $d_{p+1}$ , puis en déduire  $d_p$ .

#### I.2. Déterminants $D_n$ et $\Delta_n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $D_n$  le déterminant de la matrice carrée de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  dont le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  est  $(i+j)!$ , **les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à  $n$** .

On note  $\Delta_n = \det((i+j)!)$ . Avec les mêmes notations, on note  $\Delta_n = \det \left( \binom{i+j}{i} \right)$  pour  $(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$ .

I.2.1. Calculer les déterminants  $D_0$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $\Delta_0$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

I.2.2. Donner une relation entre  $D_n$  et  $\Delta_n$ .

I.2.3. En déduire  $\Delta_n$  puis  $D_n$ .

### Exercice 2 Déterminant d'une matrice « compagnon »

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  et  $P = \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \right) + X^n$ . On note  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé.

1. Ecrire la matrice  $A - xI_n$
2. Dans les cas particuliers  $n = 1, 2, 3$ , calculer  $\det(A - xI_n)$
3. Calculer  $\det(A - xI_n)$  pour  $n$  quelconque. Que reconnaît-on ?
4. Dans le cas  $\alpha_0 \neq 0$ , en notant  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ , justifier l'existence d'un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  tel que la famille  $\mathcal{B}' = (v, u(v), \dots, u^{n-1}v)$  soit une base de  $\mathbb{R}^n$ .