Problème 1

Série entière

Partie I

On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ de la variable complexe z, où s est un nombre réel donné.

I.1 Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

I.2 Dans cette question, $z = e^{i\theta}$ désigne un nombre complexe de module 1.

I.2.1 Etudiez la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ dans le cas où $s > 1$ ainsi que dans le cas où $s \leq 0$.

I.2.2 Dans le cas où $0 < s \leq 1$, étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ pour $z = 1$.

I.2.3 Toujours dans le cas où $0 < s \leq 1$, on suppose que $z \neq 1$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k$.

Montrer que $|S_n| \leq M(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $M(\theta) = \dfrac{1}{\left|\sin \dfrac{\theta}{2}\right|}$.

En écrivant z^k sous la forme $S_k - S_{k-1}$ pour tout nombre entier $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^{-s} z^k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right] + S_n n^{-s}.$$

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n \left[n^{-s} - (n+1)^{-s}\right]$ est convergente et en déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ est convergente.

Nous noterons dorénavant $\varphi(z, s)$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ pour tout couple $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ pour lequel cette série est convergente.

I.3 On note I l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ de $\mathbb{R}$.

I.3.1 Montrer que pour tout $(x, s) \in I \times \mathbb{R}$ on a $\varphi(x, s+1) = \displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t, s)}{t} \,\mathrm{d}t$.

I.3.2 Calculer $\varphi(x, 0)$ et $\varphi(x, 1)$ pour tout $x \in I$.

I.4 On suppose dans cete question que $s > 1$.

I.4.1 Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n(t) = e^{-nt} t^{s-1}$. Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t) \,\mathrm{d}t$ à l'aide de n, s et l'intégrale $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_1(t) \,\mathrm{d}t$.

I.4.2 Soit z un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n f_n(t)$ de fonctions de la variable réelle t est intégrable terme à terme sur $]0, +\infty[$.

En déduire que pour tout $s > 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$, on a

$$\varphi(z, s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z} \,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Partie II

Pour tout nombre réel $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \varphi(1, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

II.1 Montrer que ζ est une fonction indéfiniment dérivable de la variable s sur $]\,1, +\infty\,[$.
II.2 Montrer que ζ est strictement décroissante sur $]\,1, +\infty\,[$.
II.3 Montrer que pour tout $s \in]\,1, +\infty\,[$, on a :

$$0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s}\,\mathrm{d}t \leq \zeta(s).$$

En déduire la limite de $\zeta(s)$ lorsque s tend vers $+\infty$. Déterminer un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque s tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.

Exercice 1 *Etude de courbe*

On se propose d'étudier la courbe paramétrée $\Gamma : t \longmapsto M(t)$ définie par :
$x(t) = \dfrac{t^2+9}{t^2+1}$ et $y(t) = \dfrac{t(t^2+9)}{t^2+1}$

1. Etude des variations des fonctions x et y
   (a) Comparer $x(-t)$ et $x(t)$, $y(t)$ et $y(t)$. Qu'en déduit-on géométriquement pour la courbe G ?
   (b) Etudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers $+\infty$ Qu'en déduit-on pour les branches infinies de la courbe Γ ?
   (c) Après avoir justifier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$, calculer x' et y' et étudier le signe de ces fonctions. En déduire les coordonnées des points U et V où la tangente est horizontale. On notera U et V ces deux points en supposant que U est celui d'ordonnée positive. En déduire les coordonnées du point I où la tangente est verticale.
   (d) Dresser un tableau de variation commun aux fonctions x et y pour $t \geq 0$.
2. Construction de la courbe
   (a) Représenter les points I, U, V, leurs tangentes et la branche infinie de Γ sur la figure.
   (b) Tracer avec soin la courbe représentative de Γ sur la figure.